UNIVERSIDADE DE LISBOA

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO

CONEXÕES MATEMÁTICAS EM ÁLGEBRA

UM ESTUDO COM ALUNOS DO 7.º ANO DE ESCOLARIDADE

Catarina Dias Ferreira

Relatório

MESTRADO EM EDUCAÇÃO

Área de especialização em Didática da Matemática

2012

UNIVERSIDADE DE LISBOA

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO

CONEXÕES MATEMÁTICAS EM ÁLGEBRA

UM ESTUDO COM ALUNOS DO 7.º ANO DE ESCOLARIDADE

Catarina Dias Ferreira

Relatório orientado pelo

Professor Doutor Henrique Manuel Guimarães

MESTRADO EM EDUCAÇÃO

2012

Resumo

As conexões matemáticas surgem no ensino em várias vertentes, umas intrínsecas à Matemática, outras que exploram as ligações com a realidade e com outras áreas do saber. Embora haja uma referência às várias conexões que podem ser estabelecidas, este trabalho explorou apenas as conexões internas à Matemática.

A motivação para o estudo deste tema assentou na convicção de que as tarefas que exploram conexões entre ideias matemáticas facilitam a compreensão de conceitos, estimulam o raciocínio e concorrem para o desenvolvimento nos alunos de uma visão da Matemática como um corpo de conhecimentos integrado. A opção de trabalhar com a *Álgebra* justifica-se por ser um tema matemático com elevada relevância no 3.º ciclo de escolaridade e em que a generalidade dos alunos revela maiores dificuldades.

Com esta investigação pretendia compreender como lidam os alunos com as tarefas que envolvem conexões entre ideias matemáticas em *Álgebra*. As questões que orientaram o estudo foram: i) A que estratégias recorrem os alunos na realização de tarefas que envolvem o estabelecimento de conexões entre diferentes conceitos, processos e representações matemáticas? e ii) Que dificuldades manifestam os alunos na realização de tarefas que envolvem conexões matemáticas?

Os participantes neste estudo foram os meus alunos do 7.º ano de escolaridade tendo eu desempenhado o duplo papel de professora-investigadora. A recolha de dados decorreu no ano letivo de 2011/2012, durante os 2.º e 3.º períodos, coincidindo com o segundo ano de implementação do novo Programa de Matemática do Ensino Básico. Esta recolha socorreu-se da observação, das produções escritas dos alunos e de registos áudio e de imagem.

Os resultados evidenciaram que os alunos estabeleceram conexões entre processos, entre conceitos, entre linguagens e entre representações. Estabeleceram também outras conexões que designei por *informais*. Na resolução das tarefas de cunho exploratório os alunos evidenciaram algum desenvolvimento do pensamento algébrico.

Palavras-chave: Conexões matemáticas; Álgebra e pensamento algébrico; Sequências e regularidades; Tarefas exploratórias.

Abstract

The mathematical connections emerge in teaching in several ways, some intrinsic to mathematics and others that exploit links with reality and with other areas of knowledge. Although there is a brief reference to the various connections that can be established, this study only explored the internal connections to mathematics.

The motivation for the study of this subject was based on the initial belief that the tasks which explore connections between mathematical ideas, facilitate the understanding of concepts, stimulate mathematical reasoning and promote an integrated view of mathematics. The option of working with algebra is justified because it is a mathematical subject with great relevance in the 3rd cycle and where the majority of students face big difficulties.

With this investigation I intended to understand how students deal with tasks that involve connections between mathematical ideas in Algebra. The questions that guided the study were: i) which strategies the students use when carrying out tasks that involve establishing of connections between different concepts, processes and mathematical representations? and ii) which difficulties the students express when carrying out tasks that involve mathematical connections?

The participants in this study were my 7th grade students. I played the dual role of teacher and researcher. The data collection took place during the year 2011/2012 coinciding with second year of implementation of the New Program of Mathematics for Basic School. This collection relied from the observation, from the documents produced by students and from audio and image records.

The findings show that the students were able to established connections between processes, between concepts, between languages and between representations. They also established other connections that I named as *informal*. When carrying out exploratory tasks the students showed some development of algebraic thinking.

Keywords: Mathematical connections, Algebra and algebraic thinking; Sequences and regularities; Exploratory tasks.

Agradecimentos

Ao Professor Doutor Henrique Manuel Guimarães, que me orientou neste trabalho, pelas sugestões, pelas questões, pela gentileza dos seus comentários e pela disponibilidade que demonstrou.

Aos elementos da Direção da minha escola pelo apoio e incentivo; à diretora de turma, aos alunos e encarregados de educação envolvidos no estudo pela disponibilidade e pela forma como colaboraram.

À minha amiga Cristina, que me acompanhou neste desafio, pela partilha de ideias, pelo estímulo e acima de tudo, pela amizade e carinho.

Ao meu querido Zé Carlos, por me ter incentivado a aventurar-me no mestrado e pelo tempo que não usufruiu da minha companhia.

À minha família, em especial aos meus pais e irmão, presentes em todas as horas.

"E talvez seja afinal no contacto com facetas diversas da Matemática e na combinação de diversas formas de trabalho que resida a maior riqueza da educação matemática, desde que se dê tempo e se criem condições para se irem estabelecendo relações e se irem amadurecendo ideias."

Paulo Abrantes, 1989

Índice

Índice de figuras e de tabelas

Índice de anexos

1. Introdução

Enquanto aluna, a Matemática foi-me apresentada como um conjunto de temas organizados em unidades, trabalhados sequencialmente com poucas relações entre eles. Durante a minha formação inicial, e principalmente ao longo destes vinte anos a lecionar, tenho desconstruído esta conceção da Matemática como um saber fragmentado. O modo de encarar a Matemática como um corpo de conhecimentos integrado tem-se refletido na minha planificação e concretização das atividades letivas, assim como na preparação e dinamização das sessões de trabalho com professores, primeiro como coordenadora na minha escola, do projeto Plano da Matemática I (PMI) (2006-2009), e no triénio seguinte como professora acompanhante da implementação do novo Programa de Matemática do Ensino Básico[1] (DGIDC, 2007) e do Plano da Matemática II (PMII). Estes últimos seis anos constituíram um período de grande desenvolvimento pessoal e profissional, permitindo um estudo aprofundado do currículo prescrito para o ensino básico.

As sessões de trabalho, com os professores de diferentes agrupamentos de escolas e escolas não agrupadas, e com todos os professores envolvidos na formação dos professores acompanhantes do PMII e da implementação do novo PMEB, proporcionaram momentos muito ricos de estudo e discussão de várias temáticas relacionadas com o ensino e aprendizagem da Matemática. A minha participação nestes projetos (PM I e PM II) foram a resposta à necessidade que vinha a sentir, de investir de um modo mais consistente no aprofundamento do meu conhecimento profissional. A candidatura à frequência do mestrado e a realização do trabalho que deu origem a este relatório surge na continuidade desse investimento.

A minha significativa experiência com alunos do 3.º ciclo de escolaridade do ensino básico, tem evidenciado que são raras as situações em que os alunos perante novas aprendizagens mobilizam, de modo espontâneo, conceitos e procedimentos já aprendidos. Os nossos alunos tendem a 'arrumar' os vários assuntos em 'gavetas', não reconhecendo as conexões que podem ser estabelecidas entre eles.

[1] Daqui em diante referido apenas como PMEB

No ano letivo anterior a este estudo, lecionei turmas do 7.º ano de escolaridade com o PMEB tendo presenciado intervenções de alunos em que estes conseguiram estabelecer conexões matemáticas corretas e oportunas. O tipo de trabalho que promovi poderá ter sido impulsionador desse estabelecimento de conexões: as tarefas contribuíram para isso, foram desenvolvidas em contextos de partilha de significados e existiram momentos de discussão rica e aprofundada.

No final do ano letivo de 2010/2011 preparei, em colaboração com um grupo de colegas, uma sessão de trabalho sobre conexões matemáticas para professores no âmbito do acompanhamento e uma sessão prática no Encontro Nacional de Professores de Matemática - ProfMat 2011. Estas sessões foram bem recebidas junto dos participantes tendo eles identificado algumas das potencialidades das conexões matemáticas. A revista Educação e Matemática[2], dedicada ao tema das conexões matemáticas, contribuiu para que investisse no aprofundamento do meu conhecimento sobre esta temática e quero aqui expressar o meu reconhecimento aos autores envolvidos.

O tema do estudo que agora apresento são as *Conexões matemáticas em Álgebra* e envolveu os meus alunos do 7.º ano de escolaridade, durante o ano letivo de 2011/2012. A opção de investir no tema das conexões assentou na forte convicção de que, propor aos alunos tarefas que explorem conexões entre várias ideias matemáticas é uma ferramenta de ensino poderosa, pois: (i) podem facilitar a compreensão e mobilização de conceitos; (ii) apresentam a Matemática como um corpo de conhecimentos integrado; (iii) estimulam o raciocínio; e (iv) otimizam o tempo dedicado ao estudo dos temas curriculares. Este trabalho consiste numa análise sobre a minha prática, centrado num conjunto de tarefas de cunho exploratório que pretendem evidenciar algumas conexões entre ideias matemáticas.

A decisão de estudar especificamente as conexões matemáticas em *Álgebra*, justifica-se pela importância que este tema tem na formação matemática dos alunos do ensino básico, e que tantas dificuldades suscita nos mesmos. No PMEB, a *Álgebra* surge como um tema individualizado onde um dos objetivos do seu estudo é o desenvolvimento do pensamento algébrico. Os tópicos algébricos abordados neste trabalho são as *Sequências e regularidades*, as *Funções* e as *Equações*.

[2] Revista número 110, publicada pela Associação de Professores de Matemática, em dezembro de 2010

Com esta investigação procurei compreender como lidam os alunos com tarefas que envolvem conexões entre ideias matemáticas em *Álgebra*. As questões que orientaram o desenvolvimento do trabalho são:

- A que estratégias recorrem os alunos na resolução de tarefas que envolvem o estabelecimento de conexões entre diferentes conceitos, processos e representações matemáticos, na resolução dessas tarefas?
- Que dificuldades manifestam os alunos na resolução de tarefas que envolvem conexões matemáticas?

Este trabalho visa ser um contributo para a compreensão do tema das conexões matemáticas em tópicos algébricos, explorados no início do 3.º ciclo. Atendendo à natureza do problema em estudo este foi desenvolvido numa abordagem qualitativa (Bogdan & Biklen, 1994), assumindo eu o duplo papel de professora e investigadora. Procedi à recolha de dados nos 2.º e 3.º períodos do ano letivo 2011/2012, procedendo a registos áudio, vídeo e fotográfico de vários momentos das aulas. Efetuei a gravação, em suporte áudio, do trabalho autónomo de três grupos, de modo a superar a dificuldade que tinha antecipado de efetuar registos resultantes da observação direta. Dos registos áudio e vídeo transcrevi os elementos relevantes dos diálogos face às questões do estudo. Recolhi as produções escritas dos alunos na realização das tarefas após cada aula e guardei-as em suporte digital, permitindo-me avaliar a qualidade dos seus registos, após as diferentes fases do trabalho com as tarefas. A análise dos dados foi estruturada pelas questões do estudo tendo emergido categorias no decorrer desse análise. Relativamente às conexões, foram utilizadas as seguintes categorias: conexões entre processos; conexões conceptuais; conexões entre linguagens; conexões entre representações; e conexões *informais*.

Nos capítulos 2 e 3 realizo um enquadramento curricular do tema das conexões matemáticas, da *Álgebra* e do pensamento algébrico à luz de literatura de investigação e das orientações curriculares portuguesas e internacionais. No capítulo 4 apresento o contexto escolar onde desenvolvi o estudo, caracterizando a escola, a turma e o grupo de alunos com envolvimento mais significativo no trabalho. No início do capítulo 5 procedo à explicitação das opções didáticas, fazendo referência às decisões tomadas a nível metodológico e refletidas na lecionação das aulas; descrevo a concretização letiva realizada, documentada com a transcrição de diálogos entre os intervenientes no estudo e extratos de produções dos alunos. No capítulo seguinte, prossigo com a análise e interpretação da informação recolhida. No sétimo capítulo apresento reflexões finais sobre o trabalho.

2. Conexões matemáticas

Neste capítulo apresento o significado de conexão matemática e a sua importância no ensino e aprendizagem da Matemática. Descrevo como e quando as conexões devem constar na gestão curricular de cada professor, tendo por base a investigação existente. Faço referência à sua presença nos documentos curriculares portugueses e internacionais, assim como noutros materiais.

O significado de conexão matemática

A palavra conexão, do latim *conexiõne,* conduz à ideia de relação, ligação, dependência e afinidade (Infopédia, 2011). O conceito de conexão matemática é bastante amplo e surge com várias vertentes: as conexões internas à Matemática e as externas. Considero:

1) Conexões internas à Matemática

- *Conexões entre ideias matemáticas de temas matemáticos distintos*. Como exemplo, a representação geométrica da solução de um sistema de equações do 1.º grau evidencia uma conexão entre a *Geometria* e a *Álgebra* (Ponte, 2010a);

- *Conexões entre ideias matemáticas de um mesmo tema matemático.* Ponte (2010a) refere como exemplos, no tema dos *Números*, a conexão entre a representação decimal e fracionária dos números racionais e, na *Álgebra,* as representações gráfica e algébrica das funções.

Existem noções transversais aos vários temas matemáticos que não são, habitualmente, reconhecidas pelos alunos. Saliento a noção de *razão*: na *Geometria*, falamos de razão de semelhança entre duas figuras; nos *Números e operações*, a fração com o significado de *razão*; e na *Trigonometria*, temos as razões trigonométricas de um mesmo ângulo. Parece-me que os alunos não identificam o que há de comum nestas noções (comparação de grandezas), trabalhando-as sem identificarem um significado comum. Também a noção de *termo* surge com diferentes significados pois pode ser um elemento de uma sequência, e nas expressões algébricas, é um das suas parcelas.

2) Conexões externas à Matemática

- *Conexões da Matemática com a realidade*. A ligação com a vida real permite realçar a importância da Matemática na nossa sociedade, quer do ponto de vista científico, quer social e como instrumento de compreensão do mundo (Boavida, Paiva, Cebola, Vale & Pimentel, 2008). O professor deve encorajar os seus alunos a identificar ideias matemáticas ao longo do seu dia-a-dia, em particular na escola, salientado também as conexões com as outras áreas do saber, referidas a seguir (NCTM, 2008). Ferri (2010) afirma que a Matemática não deve ser apresentada como uma disciplina de "fórmulas e cálculos" mas como fazendo parte do "mundo real em diversas profissões" (p.19). Esta autora avança que, no contexto escolar, o processo que faz a ponte entre o mundo real e a Matemática, nos dois sentidos, é a modelação, definindo-a como: "resolver problemas da vida real com a ajuda de modelos matemáticos" (p.19). Deste modo estamos perante uma conexão com a realidade quando, para resolver um problema, os alunos "deixam as estruturas matemáticas internas para estabelecerem conexões com objetos reais e com as próprias experiências, fazendo associações" (Ferri, p.19).

- *Conexões da Matemática com outras áreas do saber*. Nestas conexões, os conceitos ou os procedimentos devem ser encarados pela perspetiva das áreas envolvidas, pois o respeito pela especificidade da linguagem própria de cada uma é fundamental para a compreensão dos alunos (Boavida et al., 2008). Por sua vez, a utilização de uma Matemática semelhante, em contextos distintos, pode passar aos alunos a mensagem do poder da Matemática e do seu carácter universal (NCTM, 2008). São múltiplos os projetos desenvolvidos nas escolas que envolvem várias disciplinas curriculares. A título de exemplo referencio o projeto europeu *MatemÁrtica* que, em Portugal, envolveu alunos do 3.º ciclo de escolaridade da Escola C+S de Lourosa, em Aveiro (Alves & Santos, 1994). Dois dos objetivos gerais do projeto eram "descobrir relações entre a arte e a Matemática e sensibilizar para a importância da Matemática na arte" (p. 311). Para além do trabalho no âmbito curricular, existem inúmeros projetos que evidenciam, por exemplo, as conexões entre a Matemática e a arte[3] e a música[4].

Nas escolas, a organização das áreas disciplinares em Departamentos Curriculares pretende promover o trabalho interdisciplinar. Na minha escola, no seu Regulamento Interno (2009-2013), pode ler-se no artigo referente às competências dos departamentos cur-

[3] http://www.bridgesmathart.org/ , consultada em 28 de junho de 2012
[4] http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/1730-8.pdf, consultada em 28 junho de 2012

riculares: “desenvolver e implementar atividades e práticas pedagógicas de carácter interdisciplinar que estejam em articulação com as estratégias e políticas educacionais a nível da escola e a nível nacional” (p.24).

Uma outra perspetiva sobre as conexões é a articulação vertical dos currículos, referida por Carreira (2010a). Esta autora chama a atenção para a possibilidade de “conectar a Matemática entre os diferentes ciclos e os vários momentos e formas de trabalhar sobre um mesmo conceito ou um mesmo problema ou um mesmo tema” (p.1). Os autores do PMEB contribuíram para a articulação entre ciclos ao: i) elaborarem um documento único para os três ciclos de escolaridade; ii) ao apresentarem na introdução de cada secção, a explicitação de como cada tema matemático/capacidade transversal se articula com o trabalhado no ciclo anterior; e iii) ao disponibilizarem, no final do documento, os “Quadros temáticos” (pp.65-68) em que os temas matemáticos e as capacidades transversais são apresentados em termos evolutivos, ao longo dos três ciclos de escolaridade (APM, 2007). Esta recomendação de articulação vertical surge também, implicitamente, nos *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*[5] (NCTM, 2008) ao referirem que os professores devem conhecer a Matemática que os seus alunos “estudaram em anos anteriores e a que irão estudar nos anos seguintes” (p.71).

Neste estudo contemplarei apenas as conexões entre ideias matemáticas, em tópicos da *Álgebra*, sem que isso seja sinónimo de desvalorização das restantes vertentes das conexões matemáticas.

Conexões: porquê, como e quando

É fundamental que o professor, na sua prática do dia-a-dia, explore as conexões que podem ser estabelecidas. A brochura *A Experiência Matemática no Ensino Básico* (Boavida et al., 2008), surgiu no âmbito do Programa de Formação Contínua em Matemática e pretendia ser um documento de apoio ao professor na gestão da integração de conceitos e processos na sala de aula. As autoras dedicaram um capítulo às conexões, onde pretendiam destacar que “o estabelecimento de conexões proporciona uma compreensão mais profunda e duradoura das ideias matemáticas e uma valorização da Matemática como instrumento de compreensão do mundo” (p. 8). Na mesma linha, Carreira (2010a) afirma que o aluno entenderá um conceito matemático se conseguir rela-

[5] Daqui em diante designadas abreviadamente por *Normas*

cioná-lo com outros adquiridos anteriormente considerando este "processo como a formação de sistemas conceptuais" (p.1).

O National Council of Teachers os Mathematics (NCTM), entidade reconhecida internacionalmente nas questões do ensino e aprendizagem da Matemática, apresenta nas suas *Normas*, as conexões como, parte integrante do conjunto das normas referentes ao "processo", em que se pretende "dar ênfase às maneiras de adquirir e utilizar os conhecimentos sobre os conteúdos" (p. 31). O NCTM (2008) enfatiza a importância do ensino evidenciar as relações entre as diversas ideias matemáticas, de modo a que os alunos reconheçam a Matemática como um todo integrado e interligado e não como um conjunto de temas soltos. Defende que haverá menor predisposição por parte dos alunos a também considerarem isoladamente, conceitos e procedimentos. Salienta também que a compreensão dos alunos será mais "profunda e duradoura" (p.71), se conseguirem estabelecer conexões entre ideias matemáticas e que, à medida que se avança na escolaridade, com o aumento da sua experiência matemática, estes devem ser capazes de "reconhecer a mesma estrutura matemática, em contextos aparentemente diferentes" (p. 72). Por outro lado, defende que um ensino que exponha as relações da Matemática com as outras disciplinas e também com os interesses e experiências dos alunos ajudará a que reconheçam a utilidade desta disciplina. Assim, segundo as *Normas* (NCTM, 2008) os alunos devem:

- Reconhecer e usar conexões entre ideias matemáticas;
- Compreender a forma como as ideias matemáticas se interrelacionam e se constroem umas a partir das outras para produzir um todo coerente;
- Reconhecer e aplicar a Matemática em contextos exteriores a ela própria (p. 71).

Registo que as mesmas *Normas* (NCTM, 2008) apresentam uma perspetiva das conexões para os primeiros anos (do pré-escolar ao 2.º ano), mesmo saindo um pouco do âmbito do ciclo de escolaridade em que se enquadra este estudo. Referem que a conexão mais importante no "desenvolvimento inicial da Matemática é a que se estabelece entre a Matemática informal e intuitiva, que os alunos aprenderam através das suas experiências, e a Matemática que aprendem na escola" (p. 154). A meu ver, esta perspetiva deve ser mantida ao longo de toda a escolaridade, devendo o professor estimular os seus alunos a encontrarem ligações entre as noções que vão aprendendo e os conhecimentos adquiridos nas suas vivências fora da sala de aula, no seu quotidiano. O NCTM alerta para que, se os alunos não estabelecerem conexões, "têm de aprender a memorizar demasiados conceitos e a desenvolver capacidades de forma isolada" (p.325).

Também para Bishop e Goffree (1986) um conceito será significativo desde que se relacione com conhecimentos adquiridos por cada individuo. Esse novo conhecimento pode ter ligação com "o conhecimento individual sobre outros tópicos mas pode estar também associado ao conhecimento de outros assuntos fora da Matemática" (p.3). Estes autores introduzem a noção de conexão associada à de explicação, em que "explicar é mais do que descrever, definir, dizer, afirmar. (…) É um processo sem fim, de representar as conexões, as relações entre a ideia que se está a explicar e outras ideias" (p.23). Assim, o explicar de um professor, associado à noção habitual de exposição, será o de expor as conexões. Afirmam ainda ser uma tarefa muito difícil porque se o professor, ao explicar, não conseguir estabelecer ligações com os conhecimentos que os seus alunos já adquiriram então não será bem-sucedido. A alternativa que apresentam é a do professor promover o "questionamento", envolvendo os alunos no processo de estabelecimento de conexões através de questões específicas. Nesta perspetiva, o momento da discussão da tarefa que foi realizada pelos alunos é potenciador de momentos de reflexão podendo ser " a ocasião mais apropriada para ajudar a que sejam expostas conexões e significados" (p.27).

Gravemeijer, no artigo "What makes mathematics so difficult, and what can we do about it?" (2005), reforça a ideia de que aprender é usualmente encarado como o estabelecimento de conexões entre o que já se sabe e o que se tem de aprender. Assim, o que torna a aprendizagem da Matemática tão difícil é o conjunto de conhecimentos "abstratos e formais" exteriores aos alunos, e que estes têm de aprender. Os professores tentam que os alunos criem ligações entre o que já sabem, com um corpo de conhecimentos que desconhecem. Apresenta como alternativa: "em vez de tentar ajudar os alunos a estabelecer conexões com o conhecimento matemático que é muito abstrato para eles, podemos querer tentar ajudá-los a construir um novo conhecimento matemático, construído sobre o que eles já sabem" (p. 99). Esta abordagem proporciona aos alunos a aprendizagem a partir de experiências do dia-a-dia, resolvendo problemas, evidenciando conexões entre a Matemática e a realidade (Educação Matemática Realista).

Carreira (2010b) avança uma outra perspetiva do estabelecimento de conexões, ligado à atividade matemática. Refere que, num contexto escolar "a criação de conexões em

Matemática (…) corresponderá a um traço da Matemática, muito mais do que a um elemento do conhecimento matemático a ser adquirido” (p.13). Por conseguinte, as conexões são intrínsecas ao pensamento matemático, ao fazer Matemática.

Nesta linha, o *Currículo Nacional do Ensino Básico* (DEB, 2001), revogado em dezembro de 2011, apresentou-se como um documento orientador dos princípios e valores do currículo nos últimos dez anos em Portugal, referia que as conexões devem ser estabelecidas entre os vários domínios. Afirmava que “uma componente essencial da formação matemática é a compreensão de relações entre ideias matemáticas, tanto entre diferentes temas de Matemática como no interior de cada tema, e ainda de relações entre ideias matemáticas e outras áreas de aprendizagem” (p.70). A ligação da Matemática com a realidade era referida como uma das competências matemáticas que os alunos deveriam desenvolver ao longo da sua escolaridade básica: “usar a Matemática, em combinação com outros saberes, na compreensão de situações da realidade, bem como o sentido crítico relativamente à utilização de procedimentos e resultados matemáticos” (p. 57). Os autores do documento acima referido recomendavam que, deviam ser propostas tarefas onde estas conexões estivessem evidenciadas e se deveria envolver os alunos em atividades que as explorassem.

Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) alertam para que, com uma organização do currículo por temas, embora constituam grandes domínios da Matemática, podem perder-se de vista as conexões que existem entre esses temas matemáticos. Também, na linha do já referido, defendem que se adquire uma compreensão mais profunda de uma noção, quando nos apercebemos que se trata de algo que pode ser observado por ‘várias lupas’. Ilustram com a noção de semelhança: o conceito geométrico é enriquecido quando “se compreendem as relações numéricas de proporcionalidade, e reciprocamente, o conceito de proporção torna-se mais consistente quando está associado à ideia de se manter a forma de uma figura apesar de se variar as suas dimensões” (p.13). Estes autores propõem um caminho a seguir: “a ideia é partir de um dado tema mas procurando evidenciar as conexões com outros, e sobretudo, tomando como meta o desenvolvimento das competências matemáticas transversais, isto é, daquelas que atravessam todos os temas e devem constituir os grandes objetivos de um currículo de Matemática” (p. 4).

As *Normas* (2008) destacam também, a importância da criação de contextos que favoreçam a aprendizagem do que é novo a partir do que o aluno sabe. As tarefas propostas devem dar origem a discussões ricas, de modo a levar os alunos a uma compreensão mais profunda dos conteúdos matemáticos. "É necessário que os alunos se tornem explicitamente conscientes da existência de conexões matemáticas" (p.71), que sejam capazes de as descrever, devendo o professor assegurar-se que identificaram as ideias matemáticas numa diversidade de contextos e modelos. O professor, ao ajudar os seus alunos a explicitarem qualquer dos tipos de conexões, também os ajuda a pensar matematicamente. Ao aperceber-se das conexões que os seus alunos já são capazes de estabelecer, o professor deverá utilizar essa informação na planificação de novas tarefas, que sejam potenciadoras de produzir novas aprendizagens, com novas conexões. Ainda segundo as orientações deste documento, os alunos poderão explicitar as formas pelas quais estabelecem conexões se o professor colocar questões como:

> - O que te levou a pensar isso?
> - Porque é que isso faz sentido?
> - Onde é que já vimos um problema como este? Em que é que este problema se assemelha ao que já resolvi antes?
> - Alguém pensou de outra maneira?
> - De que modo é que o trabalho de hoje se relaciona com aquilo que já estudámos em unidades anteriores? (p.325)

Às quais eu acrescentaria, por exemplo: *o que a resolução do Manuel tem em comum com a resolução da Maria?*

O PMEB refere como essencial que, os alunos estabeleçam conexões, dentro da Matemática e dela com outros domínios[6]; para tal, o professor deve estruturar um percurso de aprendizagem coerente, assente em tarefas que possibilitem a aprendizagem dos alunos a partir da atividade que desenvolvem, com especial atenção na reflexão, discussão e análise do trabalho realizado. Relativamente às tarefas e à atividade que elas podem vir a proporcionar, um critério interessante para avaliar a sua riqueza educativa, é o número de conexões matemáticas que sugere e as ideias de novas tarefas que despoletam para continuar o trabalho (Figueira, Loureiro, Lobo, Rodrigues & Almeida, 2007).

Tendo em conta as ideias apresentadas, com base na investigação existente, saliento que é da responsabilidade do professor a organização de tarefas que tornem visíveis as conexões para os alunos e que os ajude a desenvolver a capacidade de as mobilizar; que as conexões devem surgir ao longo do trabalho com os temas matemáticos e com as capacidades transversais; e que se deve criar um contexto de ensino favorável à discus-

[6] Desenvolvido na secção seguinte

são e reflexão sobre o trabalho realizado, contribuindo para a aprendizagem dos alunos, com significado. Como os alunos não aprendem todos do mesmo modo e nos mesmos momentos é fundamental que os professores tenham uma visão global sobre o ensino da Matemática ao longo de toda a sua escolaridade e que não se restrinjam ao ciclo onde se profissionalizaram (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999).

Carreira (2010a) destaca que:

> em qualquer das variantes [relativamente às conexões] que se possam imaginar, há decididamente uma noção importante subjacente ao papel das conexões matemáticas na aprendizagem - a de que a Matemática espreita e é necessário não deixar desaproveitadas as inúmeras oportunidades de a agarrar e de a integrar, de lhe dar sentido e coerência (p. 1).

Na mesma linha, as *Normas* reforçam que o professor deve escutar os alunos e aproveitar as oportunidades de aprendizagem que surgem de um modo imprevisto.

É reconhecida a importância das conexões, e integrá-las na gestão curricular constitui um desafio profissional para o professor. Parece-me que há um 'caminho a percorrer', de modo a que a presença das conexões no currículo implementado, seja uma realidade (NCTM, 2008).

Conexões nos documentos curriculares portugueses

As conexões matemáticas surgem nos documentos curriculares portugueses em consonância com muitas das ideias que decorrem da investigação e das orientações curriculares internacionais. Elas surgem no PMEB de diferentes modos. Por um lado, constituem um dos nove objetivos gerais do ensino da Matemática:

> Os alunos devem ser capazes de estabelecer conexões entre diferentes conceitos e relações matemáticas e também entre estes e situações não matemáticas. Isto é, devem ser capazes de:
>
> - Identificar e usar conexões entre ideias matemáticas;
> - Compreender como as ideias matemáticas se inter-relacionam, constituindo um todo;
> - Reconhecer e aplicar ideias matemáticas em contextos não matemáticos, construindo modelos matemáticos simples.
>
> Os alunos devem reconhecer a Matemática como um todo integrado, estabelecendo conexões entre aquilo que já aprenderam e aquilo que estão a aprender em cada momento, mas também ser capazes de a usar em contextos não matemáticos. O estabelecimento de conexões é essencial para uma aprendizagem da Matemática com compreensão e para o desenvolvimento da capacidade de a utilizar e apreciar. (p.6)

Surgem também, como uma capacidade transversal a desenvolver, embora não com o destaque que a resolução de problemas, a comunicação e o raciocínio matemático têm. Pode ler-se: “este programa valoriza também outras capacidades como as de representação e de estabelecimento de conexões dentro e fora da Matemática, contempladas quer no trabalho com as capacidades transversais apresentadas neste ponto, quer no trabalho com os diversos temas matemáticos” (p.7).

Têm ainda referência nas orientações metodológicas: “a exploração de conexões entre ideias matemáticas, e entre ideias matemáticas e ideias referentes a outros campos do conhecimento ou a situações próximas do dia-a-dia do aluno, constitui também uma orientação metodológica importante” (p.9). Evidencia também a importância do aluno compreender como as ideias matemáticas se relacionam entre si.

Nas indicações programáticas relativas a cada um dos ciclos, encontram-se algumas referências concretas às conexões. A seguir apresento alguns exemplos extraídos do PMEB onde estão explícitos vários tipos de conexões entre temas matemáticos, entre diferentes representações e entre a Matemática e outras áreas disciplinares:

- O tema da *Medida*, no 1.º ciclo, é apresentado como “um tema bastante rico do ponto de vista das conexões entre temas matemáticos e com situações não matemáticas” (p.7);
- No tema dos *Números e Operações*, no 1.º ciclo, “os alunos devem procurar regularidades em sequências de números finitas ou infinitas (estas usualmente chamadas sucessões), e podem também observar padrões de pontos e representá-los tanto geométrica como numericamente, fazendo conexões entre a *Geometria* e a *Aritmética*” (p.14);
- No tema *Organização e Tratamento de Dados*, no 1.º ciclo, “este tema tem potencialidades para se fazerem conexões com outras áreas curriculares e também com outros temas da Matemática” (p. 26);
- No tema da *Álgebra*, no 3.º ciclo, “estabelecer conexões com a *Geometria* e os *Números e operações* contribui para evitar a abordagem à *Álgebra* apenas como um conjunto de regras e procedimentos a memorizar” (p. 56);
- Nas *Capacidades Transversais*, no 3.º ciclo, na resolução de problemas, “significa ser capaz de (…) selecionar as estratégias e os recursos apropriados e aplicá-los, explorando conexões matemáticas para superar dificuldades” (p. 62) e “explorar conexões matemáticas para obter múltiplas perspetivas de um problema” (p.63).

As Metas de Aprendizagem[7] (Serrazina et al., 2010), disponibilizadas pelo Ministério da Educação e Ciência, constituem um instrumento de apoio à gestão do currículo sendo de utilização livre e voluntária pelos professores e devem constituir uma referência para a avaliação das aprendizagens dos alunos. Nas metas definidas para o 3.º ciclo de escolaridade do ensino básico, há referências explícitas às conexões: na *Meta Final 2* (alínea c) relativamente à resolução de problemas, pode ler-se "explora conexões matemáticas para obter múltiplas perspetivas de um problema"; e a *Meta Final 9* faz referência à capacidade de estabelecer conexões entre vários tipos de representações.

O documento que se encontrou em discussão pública sobre as metas curriculares[8] para o Ensino Básico, fazia uma breve referência à conexão entre as ideias matemáticas:

> Optou-se por formar uma sequência de objetivos gerais e de descritores, dentro de cada subdomínio, que corresponde a uma progressão de ensino adequada (…) Existem em particular algumas circunstâncias em que se torna necessário cumprir alternadamente descritores que pertencem a subdomínios ou mesmo a domínios distintos; com efeito, a arrumação dos tópicos por domínios temáticos, e simultaneamente respeitando dentro de cada domínio uma determinada progressão a isso pode levar, dada a própria natureza e interligação dos conteúdos e capacidades matemáticas (p. 1).

Nesse documento, há apenas uma referência na ligação da Matemática à realidade, no domínio da *Geometria* e *Medida*: "Saber que os objetos primitivos, relações primitivas e axiomas de algumas teorias podem ter interpretações intuitivas que permitem aplicar os teoremas à resolução de problemas da vida real e, em consequência, testar a validade da teoria como modelo da realidade em determinado contexto" (p.75).

Conexões no manual escolar e nos materiais de apoio

Os autores Viseu e Morgado (2011) referem que o manual escolar "é dos principais eixos estruturantes do currículo vivenciado pelos alunos e um importante referencial simbólico na estruturação e regulação da ação pedagógica que se desenvolve na escola, em particular na sala de aula" (p. 995). Assim sendo, dada a importância que o manual pode ter na sala de aula, até como promotor de uma certa perspetiva do saber, estando este organizado em unidades, pode contribuir para a ideia da Matemática como um con-

[7] http://www.metasdeaprendizagem.min-edu.pt/sobre-o-projecto/apresentacao/, consultado em 4 de julho de 2012

[8] http://www.portugal.gov.pt/media/643611/prop_metas_eb_matematica_vf.pdf, consultado em 9 de julho de 2012. Este documento esteve em consulta pública ente 28 de junho e 23 de julho de 2012

junto de saberes compartimentados. O modo como as conexões matemáticas surgem nos manuais pode promover a integração das conexões na prática letiva dos professores.

Os autores dos manuais delineiam uma sequência de ensino a partir da qual estruturam as várias unidades dos seus livros. Contudo, os professores, na sua autonomia, poderão decidir-se por uma sequenciação dos tópicos matemáticos a trabalhar, diferente da proposta pelo manual que adotaram. Deste modo, cada projeto editorial é valorizado, se não criar situações de incoerência, com referências ou solicitações a conceitos ainda não trabalhados. Considerando estas variáveis, entendo que não seja comum encontrar neles, tarefas que estabeleçam ligações entre conceitos abordados em diferentes unidades.

Ainda assim, no manual adotado na minha escola[9], encontrei exemplos de tarefas que estabelecem relações entre conceitos que supostamente seriam trabalhados antecipadamente e que apresento de seguida. Mas antes, na apresentação desse manual, faz-se referência à organização dos tópicos dos grandes temas matemáticos em sete unidades e pode ler-se que "a organização permite articular os grandes temas, estabelecendo conexões entre conteúdos no desenvolvimento/exploração das diversas unidades" (Costa, 2010, p. 2). Os exemplos que a seguir apresento restringem-se aos tópicos *Sequências e regularidades*, *Funções* e *Equações* e ao tipo de conexões abordados neste estudo (entre ideias matemáticas). Em alguns deles identifico o que parece ter sido uma 'forte aposta', ao longo de todo o manual - conexões com a *Geometria.* São eles:

- No tópico das *Sequências e regularidades* (unidade 2), numa proposta que envolve uma sequência numérica é recordada uma noção trabalhada na unidade 1, *Números Inteiros* (critério de divisibilidade por 3) de modo a apoiar a resolução de um item (3.2) que envolve algum raciocínio (Figura 2. 1);

[9] Novo Espaço, Belmiro Costa e Ermelinda Rodrigues, Porto Editora, 2010

Proposta 8

Os primeiros seis termos de uma sequência numérica são:

3 , 6 , 9 , 12 , 15 , 18 .

1. Escreve o termo geral da sequência.

2. Considera o conjunto $\{28, 51, 72, 80, 135\}$.
Indica os elementos do conjunto que são termos da sequência dada.

3. Recorda o critério de divisibilidade por 3 .

Um número é divisível por 3 se a soma de todos os seus algarismos for um múltiplo de 3 .

3.1 O número 7351 é termo da sequência? E o número 50 352 ?

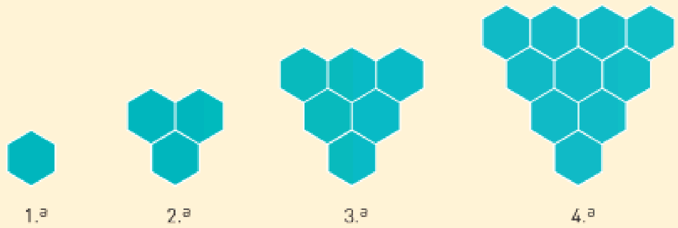
3.2 Vamos representar por ***a*** o algarismo das unidades de um número de três algarismos do tipo: ***72a*** (7 é o algarismo das centenas e 2 o das dezenas).
Indica todos os valores que podes atribuir a ***a*** para se obter algum termo da sequência dada.

Figura 2. 1: Extrato do manual do tópico *Sequências e regularidades* (vol. 2, p. 71)

- Ainda no tópico das *Sequências e regularidades*, são vários os exemplos de sequências geométricas com questões envolvendo noções de medida, como o perímetro e área (Figura 2. 2);

Tarefa 5

Com peças hexagonais regulares, com 1 cm de lado, foi construída uma sequência de figuras, cujas quatro primeiras estão a seguir representadas.

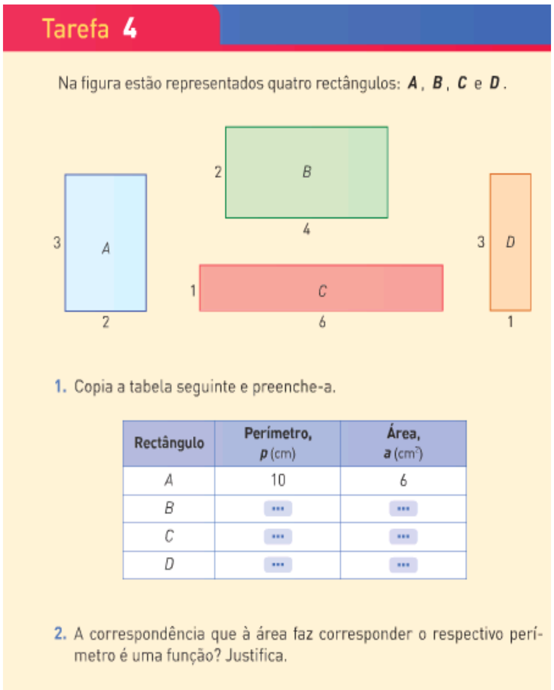


1. Completa a seguinte tabela.

N.º de ordem da figura, n	N.º de hexágonos da figura	Perímetro da figura
1	...	...
2	...	12
3	...	...
4	...	...
5	...	...
...	...	...
n	$\frac{n(n+1)}{2}$	...

Figura 2. 2: Extrato do manual do tópico *Sequências e regularidades* (vol. 2, p. 68)

- No tópico das *Funções* (unidade 3), novamente a ligação com a *Geometria*, em duas tarefas consecutivas (Figura 2. 3 e Figura 2. 4):



Tarefa 4

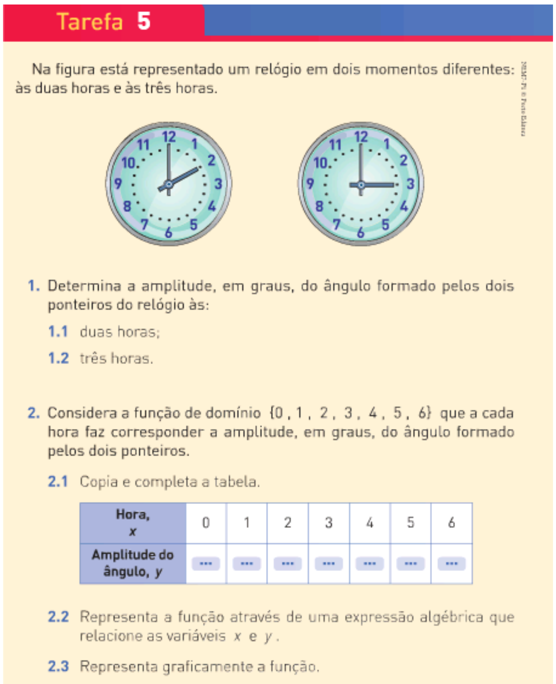
Na figura estão representados quatro rectângulos: ***A***, ***B***, ***C*** e ***D***.

1. Copia a tabela seguinte e preenche-a.

Rectângulo	Perímetro, *p* (cm)	Área, *a* (cm^2)
A	10	6
B	...	...
C	...	...
D	...	...

2. A correspondência que à área faz corresponder o respectivo perímetro é uma função? Justifica.

Figura 2. 3: Extrato do manual do tópico *Funções* (vol. 2, p. 87)



Tarefa 5

Na figura está representado um relógio em dois momentos diferentes: às duas horas e às três horas.

1. Determina a amplitude, em graus, do ângulo formado pelos dois ponteiros do relógio às:

1.1 duas horas;

1.2 três horas.

2. Considera a função de domínio {0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6} que a cada hora faz corresponder a amplitude, em graus, do ângulo formado pelos dois ponteiros.

2.1 Copia e completa a tabela.

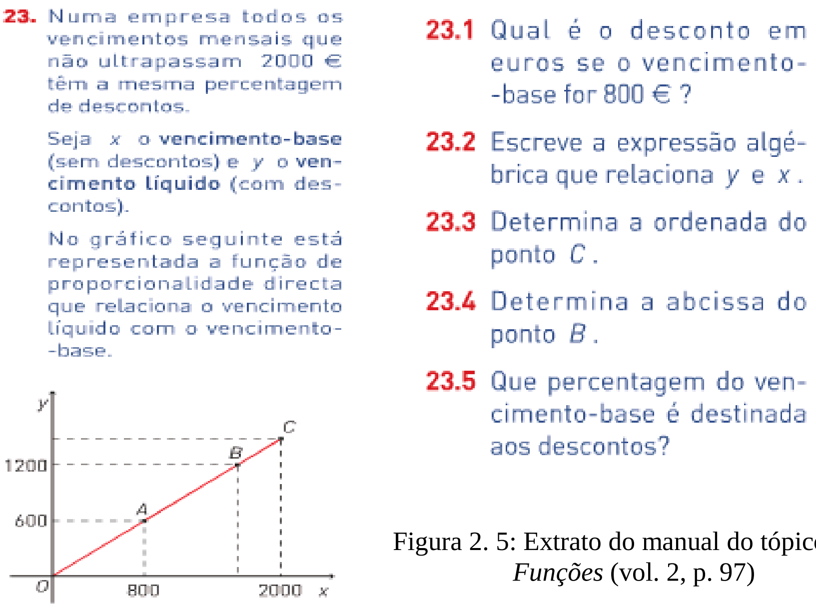
Hora, *x*	0	1	2	3	4	5	6
Amplitude do ângulo, *y*	...	...	...	...	...	...	...

2.2 Representa a função através de uma expressão algébrica que relacione as variáveis *x* e *y*.

2.3 Representa graficamente a função.

Figura 2. 4: Extrato do manual do tópico *Funções* (vol. 2, p. 88)

- No tópico das *Funções*, um dos itens envolve a resolução de uma equação, assunto que é trabalhado numa unidade mais à frente, mas que o professor pode aqui explorar (23.4, Figura 2. 5). Chamo ainda a atenção para o item 23.5, que retoma o conceito de percentagem, podendo a resposta ser obtida não por cálculo, mas através da interpretação do valor da constante de proporcionalidade.



23. Numa empresa todos os vencimentos mensais que não ultrapassam 2000 € têm a mesma percentagem de descontos.

Seja *x* o **vencimento-base** (sem descontos) e *y* o **vencimento líquido** (com descontos).

No gráfico seguinte está representada a função de proporcionalidade directa que relaciona o vencimento líquido com o vencimento-base.

23.1 Qual é o desconto em euros se o vencimento-base for 800 € ?

23.2 Escreve a expressão algébrica que relaciona *y* e *x*.

23.3 Determina a ordenada do ponto *C*.

23.4 Determina a abcissa do ponto *B*.

23.5 Que percentagem do vencimento-base é destinada aos descontos?

Figura 2. 5: Extrato do manual do tópico *Funções* (vol. 2, p. 97)

- No tópico das *Equações* (unidade 6), uma das propostas, envolve uma propriedade que foi trabalhada na unidade 4 (sobre a soma das amplitudes dos ângulos internos de um quadrilátero). Esta dependência de noções trabalhadas em unidades anteriores aparece aqui como uma exceção (Figura 2. 6);

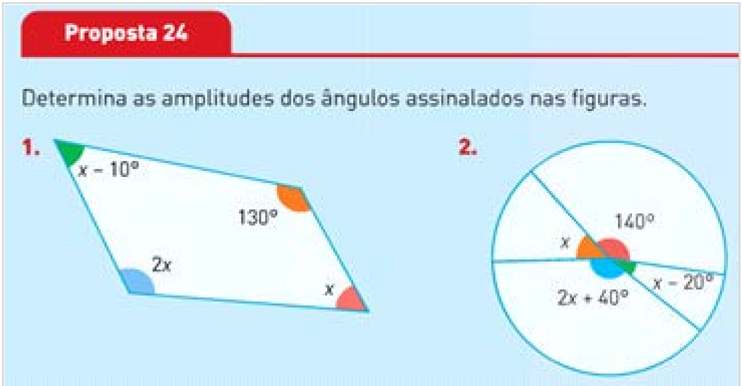


Figura 2. 6: Extrato do manual do tópico *Equações (*vol. 2, p. 84)

- Ainda no tópico das *Equações* surge uma tarefa com forte ligação ao tópico das *Sequências e regularidades* que, a meu ver, é bastante rica (Figura 2. 7);

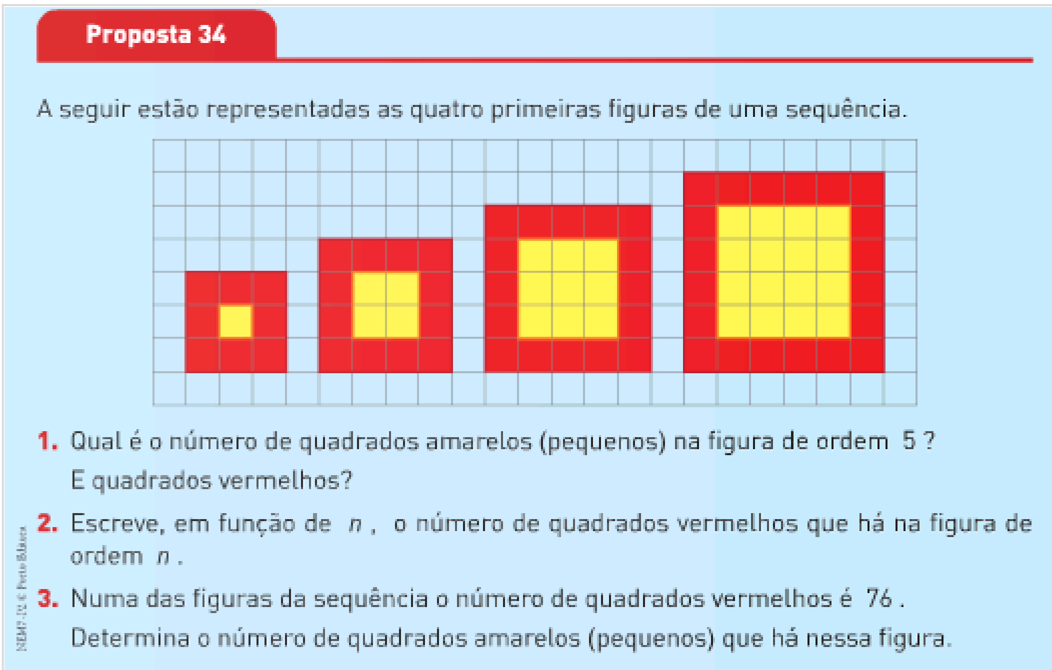


Figura 2. 7: Extrato do manual do tópico *Equações* (vol. 2, p. 87)

Nos materiais de apoio à implementação do PMEB, disponibilizados pela extinta DGIDC [10], existem referências explícitas às conexões. Tendo-me debruçado apenas sobre os materiais relativos aos tópicos matemáticos em estudo, identifiquei:

[10] *Site* com os materiais, em 19 de julho de 2012: http://area.dgidc.min-edu.pt/materiais_NPMEB/home.htm

- Na brochura sobre *Sequências e Funções* (Ponte, Matos & Branco, 2009b), nas indicações para os professores relativas à tarefa 1 (p. 49), que visava a identificação e marcação de pares ordenados no plano cartesiano, há uma sugestão de conexão com o tema de Organização e Tratamento de Dados e ainda com o tema dos Números; na tarefa 3 (p.65) que pretendia reforçar a sua capacidade de identificar e assinalar pares ordenados no plano cartesiano e serem capazes de comparar a variação em duas situações representadas graficamente, salientam-se as conexões entre diferentes representações (tabelas e gráficos);
- Na brochura sobre *Equações,* evidencio as tarefas 3 e 4 (pp. 18 e 21), em que se trabalha as equações, quer no tópico das *Sequências e regularidades* quer no tópico *Triângulos e quadriláteros*. Os autores pretendiam que as equações surgissem de um modo contextualizado, em que o aluno é solicitado a interpretar e criticar as soluções obtidas no contexto do problema. A proposta apresentada na figura anterior (Figura 2. 7) é muito semelhante a uma destas tarefas, o que poderá ser indiciador de uma preocupação dos autores do manual em seguir as orientações emanadas pela equipa que realizou a experimentação do PMEB;
- Na brochura da *Álgebra* (Ponte, Branco & Matos, 2009a), existem quatro referências que realçam o potencial das conexões da *Álgebra* com a *Geometria*, com os *Números* e *Operações* e também com a *Organização e Tratamento de Dados* (pp. 111, 148, 157, e 171). Há ainda referência a conexões entre as equações e as funções.

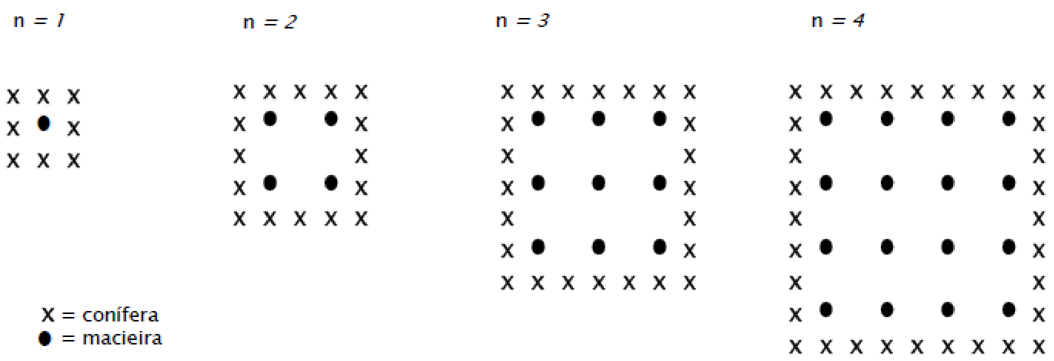
Conexões no PISA

A equipa do PISA (GAVE, 2004, p.28) estruturou as atividades cognitivas em três grupos, as quais definiu por “*constelações de competências”*, sendo uma delas designada por *conexão*. Os itens desta categoria requerem habitualmente, algum exercício de integração e de conexão do material dos vários temas abrangentes, das diferentes linhas de orientação do currículo da Matemática, e ainda a junção de diferentes representações de um problema. Embora os problemas sejam não rotineiros, requerem graus de matematização relativamente diminutos. Apresento de seguida (Figura 2. 8), um exemplo de item incluído nesta categoria, da prova de 2000. Este item envolve uma sequência pictórica ao qual estão associadas duas sequências numéricas. Disponibilizo também, os resultados obtidos pelos alunos portugueses à primeira questão, onde se pode verificar que o sucesso neste item foi baixo. Tenho a convicção de que, devido à forte presença que este tópico tem no atual PMEB (documentado no capítulo seguinte), levará a que futuramente os nossos alunos manifestem um melhor desempenho em itens deste tipo.

MACIEIRAS

Um lavrador planta macieiras num padrão quadrangular. A fim de proteger as árvores do vento, planta coníferas à volta do pomar.

Esta situação está ilustrada no diagrama abaixo representado, no qual se pode ver a disposição das macieiras e das coníferas para um número qualquer (n) de filas de macieiras:



Questão 1: MACIEIRAS

Complete a tabela

n	Número de macieiras	Número de coníferas
1	1	8
2	4	
3		
4		
5		

Resultados obtidos:

Códigos	Percentagem de ocorrência
0	53.2
1	15.7
2	29.2
Inválido	0.0
Omite	1.9

Comentário:

Apenas cerca de 30% dos nossos alunos respondeu corretamente à questão 1. Mais de metade dos alunos preencheu erradamente pelo menos duas células da tabela (código 0).

Neste problema, a maior dificuldade era o preenchimento das células da última linha, que não estavam representadas. Os alunos teriam de desenhar a figura seguinte ou inferir a regra. Poderiam ainda simplesmente, utilizar a informação fornecida na questão 2, que apresento a seguir (GAVE, 2004, p.28).

Questão 2: MACIEIRAS

Existem duas fórmulas que pode usar para calcular o número de macieiras e o número de coníferas do padrão atrás descrito:

Número de macieiras = n^2

Número de coníferas = $8n$

Em que n é o número de filas de macieiras.

Existe um valor de n para o qual o número de macieiras é igual ao número de coníferas. Descubra esse valor de n e indique o método que usou para o calcular.

Figura 2. 8: Item da prova do PISA de 2000, resultados e comentário

3. *Álgebra* e pensamento algébrico

É minha convicção de que só com um conhecimento da globalidade do currículo prescrito, apoiado num conhecimento científico aprofundado dos temas matemáticos que ele apresenta, possibilitará ao professor uma gestão curricular tendo por base as conexões. Este capítulo começa com uma abordagem à *Álgebra* e ao pensamento algébrico e prossegue com o enquadramento curricular dos conteúdos matemáticos envolvidos no estudo (*Sequências e regularidades*, *Funções* e *Equações*). Descrevo ainda algumas opções tomadas em termos de planificação.

A *Álgebra* é uma das grandes áreas da Matemática. A visão tradicional da *Álgebra* associa-a à manipulação de símbolos, a um conjunto de regras operatórias aplicadas a expressões com variáveis e números e a um conjunto de processos de resolução de condições. Esta visão não se restringia à realidade portuguesa. James Kaput, investigador americano, escrevia: "A *Álgebra* escolar tem tradicionalmente sido ensinada e aprendida como um conjunto de procedimentos desligados quer dos outros conteúdos matemáticos, quer do mundo real dos alunos" (citado em Canavarro, 2009, p. 12). Esta é uma visão muito redutora da *Álgebra*, pois deixa de fora, por exemplo, a resolução de problemas, e uma diversidade de situações que envolvem, relações, regularidades, generalização, variação e modelação (Canavarro, 2009; Ponte, 2006a). Os elementos centrais da *Álgebra* devem ser, segundo Kaput (citado em Canavarro, 2009):

> 1. O estudo das estruturas e sistemas abstraídos a partir do resultado de operações e estabelecimento de relações, incluindo os que surgem na *Aritmética* (*Álgebra* como *Aritmética* generalizada) ou no raciocínio quantitativo;
> 2. *Álgebra* como o estudo das funções, relações e (co)variação;
> 3. *Álgebra* como a aplicação de um conjunto de linguagens de modelação, tanto no domínio da Matemática, como no seu exterior (p. 89).

Estes últimos dois aspetos referem-se ao pensamento funcional (Canavarro, 2009).

As *Normas* para a *Álgebra* (NCTM, 2008) afirmam que os programas de ensino "deverão habilitar todos os alunos para:

- Compreender padrões, relações e funções;
- Representar e analisar situações e estruturas matemáticas usando símbolos algébricos;
- Usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas;
- Analisar a variação em diversos contextos" (p. 39).

Estes aspetos são retomados nas normas para os vários anos de escolaridade. Registo, na tabela seguinte (Tabela 3. 1), os objetivos relativos ao 6.º, 7.º e 8.º anos de escolaridade:

Compreender padrões, relações e funções
• Representar, analisar e generalizar uma diversidade de padrões, através de tabelas, gráficos, palavras e, sempre que possível, expressões simbólicas; • Relacionar e comparar diferentes formas de representação de uma relação; • Identificar funções como lineares ou não lineares e diferenciar as suas propriedades, a partir de tabelas, gráficos ou equações.
Representar e analisar situações e estruturas matemáticas usando símbolos algébricos
• Desenvolver uma primeira compreensão conceptual das diferentes utilizações das variáveis; • Explorar relações entre expressões algébricas e gráficos de linhas, dando particular atenção ao significado de interseção e declive; • Usar a *Álgebra* simbólica para representar situações e resolver problemas, sobretudo aqueles que envolvam relações lineares; • Reconhecer e produzir formas equivalentes de expressões algébricas simples, e resolver equações lineares.
Usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas
• Modelar e resolver problemas inseridos num contexto, utilizando diversas representações, como gráficos, tabelas e equações.
Analisar a variação em diversos contextos
• Usar gráficos para analisar a natureza das variações de quantidades em relações lineares.

Tabela 3. 1: Extraído das *Normas* (NCTM, 2008, p. 262)

Na linha do referido, a *Álgebra* deixou de ser apenas um conjunto de procedimentos envolvendo símbolos, passando a ser vista como uma forma de pensamento e raciocínio (Kieran, citado em Canavarro, 2009). Deste modo, o grande objetivo do estudo da *Álgebra* no ensino básico, é o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos (Ponte, 2005a). E o que se entende por pensamento algébrico? Autores reconhecidos internacionalmente nesta área, caracterizam o pensamento algébrico como o “processo pelo qual os alunos generalizam ideias matemáticas a partir de um conjunto de casos particulares, estabelecem essas generalizações através de discurso argumentativo, e expressam-nas de formas progressivamente mais formais e adequadas à sua idade” (Blanton & Kaput, citado em Canavarro, 2009, p.87).

O NCTM (2008) considera que, o pensamento algébrico diz respeito ao estudo das estruturas, à simbolização, à modelação e ao estudo da variação. O pensamento algébrico inclui a capacidade de lidar com expressões algébricas, com equações e com funções, mas também com a capacidade de lidar com outras relações e estruturas matemáticas e de usá-las na interpretação e resolução de problemas matemáticos. Contribuiu para 'ver' a *Álgebra* não apenas como um conjunto de regras de manipulação simbólica, pois envolve uma forma de pensamento.

Um dos aspetos que distingue o pensamento algébrico da visão tradicional da *Álgebra* é a utilização simbólica com significado. Esta capacidade de manipulação de símbolos é um dos elementos do pensamento algébrico, assim como o é o "sentido de símbolo", que inclui a capacidade de interpretar e usar de forma criativa os símbolos matemáticos na descrição de situações e na resolução de problemas (Ponte et al., 2009a). Não desvalorizando a importância da utilização da linguagem algébrica e, reconhecendo-lhe grande capacidade na tradução de ideias gerais, esta surge num contexto de raciocínios com compreensão, em que por exemplo, a letra tem um significado para o aluno, na situação que este está a explorar.

Os autores da brochura - *Álgebra no Ensino Básico* (Ponte et al., 2009a) identificaram as três vertentes fundamentais do pensamento algébrico: *representar,* em que o aluno deverá ser capaz de utilizar diferentes sistemas de representação; *raciocinar*, onde o aluno deverá raciocinar dedutivamente e indutivamente e onde é realçada a capacidade de relacionar e generalizar; e *resolver problemas e modelar situações*, utilizando as ferramentas algébricas (Figura 3. 1).

	Quadro 1 – Vertentes fundamentais do pensamento algébrico
Representar	▪ Ler, compreender, escrever e operar com símbolos usando as convenções algébricas usuais; ▪ Traduzir informação representada simbolicamente para outras formas de representação (por objetos, verbal, numérica, tabelas, gráficos) e vice-versa; ▪ Evidenciar sentido de símbolo, nomeadamente interpretando os diferentes sentidos no mesmo símbolo em diferentes contextos.
Raciocinar	▪ Relacionar (em particular, analisar propriedades); ▪ Generalizar e agir sobre essas generalizações revelando compreensão das regras; ▪ Deduzir.
Resolver problemas e modelar situações	▪ Usar expressões algébricas, equações, inequações, sistemas (de equações e de inequações), funções e gráficos na interpretação e resolução de problemas matemáticos e de outros domínios (modelação).

Figura 3. 1: Extraído da Brochura da *Álgebra* (Ponte et al., 2009a, p. 11)

Tornar o pensamento algébrico uma orientação transversal do currículo significa, como sugerem Kaput e Blanton (citado em Ponte, 2005a):

- Promover hábitos de pensamento e de representação em que se procure a generalização, sempre que possível;
- Tratar os números e as operações algebricamente – prestar atenção às relações existentes (e não só aos valores numéricos em si) como objetos formais para o pensamento algébrico;
- Promover o estudo de padrões e regularidades, a partir do 1.º ciclo (p.37).

Realço a importância do estudo dos padrões como uma via para a promoção do pensamento algébrico. Vale, Pimentel, Barbosa, Fonseca, Santos e Canavarro (2006a) defendem que, quando se trabalha com padrões, está-se a fornecer aos alunos um ambiente de aprendizagem próximo das suas vivências e experiências, permitindo-lhes "descobrirem relações, encontrarem conexões, fazerem generalizações e também previsões" (p.197). Ponte (2005b) afirma que, visto no pensamento algébrico se valorizar tanto os objetos como as relações entre eles e defende também o estudo dos padrões e regularidades como um contexto privilegiado para a representação e generalização dessas relações.

Segundo Vlassis e Demonty (2008), o ensino das primeiras noções algébricas pode ser visto em duas perspetivas: por um lado, uma mais formal, a nível dos procedimentos, com manipulação de expressões algébricas e resolução de equações, e outra, a um nível funcional, com a generalização de relações matemáticas, com a resolução de problemas e com as demonstrações. Salientam que "a função da *Álgebra* é posta em evidência colocando as manipulações [algébricas] em contextos que justificam a sua utilização" (p. 12). Assim sendo, poderá contribuir para o reconhecimento, por parte dos alunos, na relevância do estudo deste tema.

A *Álgebra* é uma das áreas onde os alunos revelam maiores dificuldades de aprendizagem. De acordo com a investigação, uma das razões que justificam o insucesso, prende-se com o uso da simbologia, sem lhes ser atribuída significado e com o uso de regras sem compreensão. A transição do raciocínio aritmético para o raciocínio algébrico traz consigo bastantes obstáculos, justificando alguns dos erros mais comuns. Os alunos têm dificuldade em compreender os diferentes significados que são atribuídos aos símbolos, por exemplo, a letra surge como número generalizado, como incógnita e como variável. Também não compreenderem a mudança de significado dos símbolos da *Aritmética* para a *Álgebra*, por exemplo, do sinal de igualdade (Ponte, 2005a).

A Álgebra no Programa de Matemática do Ensino Básico

No antigo programa de Matemática do ensino básico, a *Álgebra* não constituía um tema autónomo, trabalhando-se conceitos algébricos nos *Números* e *Cálculo* e existia o tópico das *Funções*. A conceção de *Álgebra* que está presente no PMEB, vai ao encontro das tendências curriculares e da investigação neste domínio. Ela surge revalorizada, relativamente ao currículo anterior, constituindo um dos quatro grandes temas matemáticos a ser trabalhado ao longo dos três ciclos de escolaridade do ensino básico. Surge a ideia de "pensamento algébrico", logo no início do documento, em que os autores do programa a apresentam como um dos quatro eixos, a par do "trabalho com os números e operações, (…) [d]o pensamento geométrico e [d]o trabalho com dados" (p. 1), em torno dos quais o programa se desenvolve. Aos professores, a *Álgebra* aparece nesse documento "como forma de pensamento matemático" (p. 7).

Segundo Oliveira (2009), as diferenças significativas relativamente aos programas anteriores, assentam nas seguintes ideias:

> i) os alunos podem começar a pensar algebricamente mais cedo no seu percurso escolar; ii) a capacidade de generalização é um aspeto central na *Álgebra* e na Matemática, em geral, que ganha em ser promovida desde as etapas iniciais do ensino básico; iii) a utilização de simbolismo algébrico deve ser progressiva, sendo que as múltiplas representações têm um papel importante nesse contexto; e iv) deve existir uma forte articulação e continuidade entre os vários tópicos da Álgebra (p. 84).

Na globalidade destes aspetos, identifico uma especial atenção dada à articulação vertical dos conceitos ao longo da escolaridade, e nos últimos dois aspetos referidos, verifico que sobressaem as conexões entre diferentes representações e noções matemáticas.

No 1.º ciclo a *Álgebra* não constituí um tema autónomo, mas há "objetivos de cunho algébrico em outros temas deste ciclo" (PMEB, 2007, p.7). No tema *Números e operações*, as ideias algébricas começam a ser trabalhadas com o estudo de sequências numéricas e padrões geométricos. O trabalho com regularidades, que podem ser generalizáveis através de regras formuladas pelos alunos, contribuirá para o desenvolvimento do pensamento algébrico, conforme anteriormente referido.

Nos 2.º e 3.º ciclos do ensino básico a *Álgebra* surge como tema autónomo. A tabela seguinte (Tabela 3. 2) inclui um extrato das indicações metodológicas no tema dos *Números e Operações* do 1.º ciclo, onde fazem referência ao desenvolvimento do pensamento algébrico, apresentam o propósito principal de ensino e os objetivos gerais, ligados aos tópicos envolvidos no estudo, no tema da *Álgebra*. Nela pode ler-se que, no 2.º ciclo é propósito principal de ensino que os alunos consigam representar através de símbolos, enquanto no ciclo de escolaridade seguinte já é pedido que utilizem a linguagem e procedimentos algébricos, surgindo a modelação matemática. No 3.º ciclo surge a noção de função.

1.º Ciclo	
Números e Operações (p. 14)	
Indicações metodológicas	A exploração de situações relacionadas com regularidades de acontecimentos, formas, desenhos e conjuntos de números é importante neste ciclo. Os alunos devem procurar regularidades em sequências de números finitas ou infinitas (estas usualmente chamadas sucessões), e podem também observar padrões de pontos e representá-los tanto geométrica como numericamente, fazendo **conexões** entre a geometria e a *Aritmética*. Este trabalho com regularidades generalizáveis, segundo regras que os alunos podem formular por si próprios, ajuda a desenvolver a capacidade de abstração e contribui para o desenvolvimento do pensamento algébrico
2.º Ciclo	
Álgebra (p. 40)	
Propósito principal de ensino	Desenvolver nos alunos o pensamento algébrico, bem como a sua capacidade de representar simbolicamente situações matemáticas e não matemáticas e de resolver problemas em contextos diversos
Objetivos gerais de aprendizagem	· ser capazes de explorar, investigar regularidades · compreender a noção de proporcionalidade direta e usar o raciocínio proporcional · ser capazes de resolver problemas, raciocinar e comunicar recorrendo a representações simbólicas
3.º Ciclo	
Álgebra (p. 55)	
Propósito principal de ensino	Desenvolver nos alunos a linguagem e o pensamento algébricos, bem como a capacidade de interpretar, representar e resolver problemas usando procedimentos algébricos e de utilizar estes conhecimentos e capacidades na exploração e modelação de situações em contextos diversos
Objetivos gerais de aprendizagem	· ser capazes de interpretar e representar situações em contextos diversos, usando linguagem e procedimentos algébricos · compreender o conceito de função e ser capazes de o usar em diversas situações, em particular de proporcionalidade direta · ser capazes de resolver problemas, comunicar, raciocinar e modelar situações recorrendo a conceitos e procedimentos algébricos

Tabela 3. 2: Propósito principal de ensino e objetivos gerais

Os tópicos *Sequências e regularidades*, *Funções* e *Equações* surgiam nos programas anteriores sem aparente conexão. No PMEB, segundo Oliveira (2009), a "ideia de relação" parece surgir como um fio condutor. Nas sequências surge a letra como variável, a qual, por um lado, é fundamental no desenvolvimento do "pensamento funcional" (p.85), e por outro constitui um contexto para o trabalho com expressões algébricas, quer seja, na compreensão da sua equivalência, quer nas regras de simplificação. Oliveira (2009) destaca que a noção de proporcionalidade direta percorre toda a escolaridade, começando por ser vista como uma relação, sendo explicitada no 2.º ciclo, surgindo como função no 3.º ciclo, mas mantendo a sua identidade de relação.

A seguir apresento uma compilação da informação sobre os tópicos algébricos *Sequências e regularidades*, *Funções* e *Equações*, tal como são apresentados no PMEB. Esta sistematização evidencia a organização em espiral dos conceitos, ao longo dos três ciclos da escolaridade básica.

Sequências e regularidades

O estudo de sequências, sejam elas numéricas ou geométricas, é essencial no desenvolvimento do pensamento algébrico pois envolvem processos fundamentais para a compreensão da *Álgebra*. O estudo de padrões contribui para o desenvolvimento do pensamento algébrico pois envolve a generalização e a modelação e constitui uma componente poderosa no estabelecimento de conexões (Vale & Pimentel, 2005; Vale, Pimentel, Barbosa, Fonseca, Santos & Canavarro, 2006a). Vale e Pimentel (2005) afirmam que, o que os matemáticos fazem melhor é descobrir e revelar padrões escondidos, sendo o próprio objetivo da Matemática, de certo modo, "descobrir a regularidade onde parece vingar o caos, extrair a estrutura e a invariância da desordem e da confusão" (Vale & Pimentel, 2005, p. 14).

O tópico *Sequências e regularidades* 'percorre' todo o ensino básico: no 1.º ciclo, este tópico integra o tema *Números e operações*, envolvendo a exploração de regularidades numéricas em sequências e em tabelas de números. Os alunos devem identificar a lei de formação de uma dada sequência e expressarem-na por palavras suas.

Nos 2.º e 3.º ciclos este tópico está incluído no tema da *Álgebra*, envolvendo a exploração de sequências, o uso da linguagem simbólica para as representar e a utilização de diferentes representações de uma relação. Surge a utilização da letra como número generalizado. No 2.º ciclo os alunos contactam, pela primeira vez, com os conceitos de *termo* e *ordem*. No 3.º ciclo usa-se a linguagem algébrica para expressar generalizações, nomeadamente para representar o *termo geral* de uma sequência. O aluno é solicitado a compreender e simplificar expressões algébricas. Pede-se ainda que compreenda os diferentes papéis dos símbolos utilizados em *Álgebra*.

A seguir apresento uma tabela onde se listam tópicos, objetivos específicos e notas para o professor, com informação extraída do PMEB. Pretende-se assim fornecer a globalidade do que se perspetiva do ensino das *Sequências e regularidades*, no ensino básico.

<table>
<tr><th colspan="3">1.º Ciclo</th></tr>
<tr><td colspan="3">1.º e 2.º anos (p. 17)</td></tr>
<tr><th>Tópicos</th><th>Objetivos específicos</th><th>Notas</th></tr>
<tr><td>Regularidades
• Sequências</td><td>• Elaborar sequências de números segundo uma dada lei de formação e investigar regularidades em sequências e em tabelas de números.</td><td>• Exemplos:
- 2, 4, 6, 8, 10... (números pares);
- 1, 4, 7, 10, 13... (começar com 1 e adicionar 3 sucessivamente);
- 2, 5, 11, 23... (duplicar o número e adicionar 1).
• Colocar questões do tipo: Numa tabela de números até 100 marcar números de 5 em 5, começando no 3. Qual é o padrão representado pelos algarismos das unidades?</td></tr>
<tr><td colspan="3">3.º e 4.º anos (p. 18)</td></tr>
<tr><td>Regularidades
• Sequências</td><td>• Investigar regularidades numéricas.</td><td>• Explorar regularidades em tabelas numéricas e tabuadas, em particular as dos múltiplos.</td></tr>
<tr><th colspan="3">2.º Ciclo (p. 41)</th></tr>
<tr><th>Tópicos</th><th>Objetivos específicos</th><th>Notas</th></tr>
<tr><td>• Sequências e regularidades</td><td>• Identificar e dar exemplos de sequências e regularidades numéricas e não numéricas.
• Determinar o termo seguinte (ou o anterior) a um dado termo e ampliar uma sequência numérica, conhecida a sua lei de formação.
• Determinar termos de ordens variadas de uma sequência, sendo conhecida a sua lei de formação.
• Analisar as relações entre os termos de uma sequência e indicar uma lei de formação, utilizando a linguagem natural e simbólica.
• Representar simbolicamente relações descritas em linguagem natural e reciprocamente.
• Interpretar diferentes representações de uma relação e relacioná-las.</td><td>• Usar a calculadora na exploração de regularidades numéricas.</td></tr>
<tr><th colspan="3">3.º Ciclo (p.56)</th></tr>
<tr><th>Tópicos</th><th>Objetivos específicos</th><th>Notas</th></tr>
<tr><td>Sequências e regularidades
• Termo geral de uma sequência numérica
• Representação
• Expressões algébricas</td><td>• Compreender a noção de termo geral de uma sequência numérica e representá-lo usando símbolos matemáticos adequados.
• Determinar um termo geral de uma sequência numérica e termos de várias ordens a partir do termo geral.
• Compreender os diferentes papéis dos símbolos em Álgebra.
• Simplificar expressões algébricas.</td><td>• Propor a representação de sequências de frações em que os numeradores e os denominadores tenham relações simples
(por exemplo, $\frac{2n}{n+1}$ e $\frac{n+1}{n+3}$)
• Os alunos devem distinguir “variável” de “constante” e de “parâmetro”.
• Propor a simplificação de expressões como:
x- (4-2x) e - x^2- x + 3x^2.</td></tr>
</table>

Tabela 3. 3: *Sequências e regularidades* ao longo da escolaridade básica

Funções

A noção de função é apenas introduzida no 3.º ciclo de escolaridade. Conforme anteriormente referido, a noção de proporcionalidade surge logo no primeiro ciclo e evolui até ser proposta, no 3.º ciclo, como uma função de proporcionalidade direta. O quadro seguinte sintetiza a presença dessa noção ao longo da escolaridade. Na linha referente ao 3.º ciclo, contemplo apenas o planificado para o 7. º ano de escolaridade.

<table>
<tr><th colspan="3">1.º Ciclo (p. 18)</th></tr>
<tr><th colspan="3">3.º e 4.º anos – Números e Operações</th></tr>
<tr><th>Tópicos</th><th>Objetivos específicos</th><th>Notas</th></tr>
<tr><td>Regularidades
• Sequências</td><td>• Resolver problemas que envolvam o raciocínio proporcional.</td><td>Usar tabelas na resolução de problemas que envolvam raciocínio proporcional.
Por exemplo: Duas bolas custam 30 €.
<table><tr><td>N.º de bolas</td><td>2</td><td>4</td><td>40</td><td>...</td></tr><tr><td>Custo das bolas</td><td>30</td><td>60</td><td>600</td><td>....</td></tr></table>Quanto custam 40 bolas? E 400 bolas?</td></tr>
<tr><th colspan="3">2.º Ciclo – Álgebra (p. 41)</th></tr>
<tr><th>Tópicos</th><th>Objetivos específicos</th><th>Notas</th></tr>
<tr><td>Relações e regularidades
• Proporcionalidade direta</td><td>· Compreender os conceitos de razão, proporção e constante de proporcionalidade.
· Utilizar proporções para modelar situações e fazer previsões.
· Resolver e formular problemas envolvendo situações de proporcionalidade direta.</td><td>• Distinguir situações em que não existe proporcionalidade de situações em que existe, solicitando, neste caso, a constante de proporcionalidade.
· Usar situações que envolvam percentagens e escalas, e a análise de tabelas e gráficos.
· Propor situações que permitam verificar a propriedade fundamental das proporções.</td></tr>
<tr><th colspan="3">3.º Ciclo - Álgebra (p. 56)</th></tr>
<tr><th>Tópicos</th><th>Objetivos específicos</th><th>Notas</th></tr>
<tr><td>Funções
· Conceito de função e de gráfico de uma função

· Proporcionalidade direta como funções</td><td>· Compreender o conceito de função como relação entre variáveis e como correspondência entre dois conjuntos, e utilizar as suas várias notações.
· Identificar e assinalar pares ordenados no plano cartesiano.
· Analisar uma função a partir das suas representações.
· Interpretar a variação de uma função representada por um gráfico, indicando intervalos onde a função é crescente, decrescente ou constante.
· Analisar situações de proporcionalidade direta como função do tipo $y = kx$ ($k \neq 0$).
· Representar algebricamente situações de proporcionalidade direta.</td><td>· Dar destaque ao conceito de função como relação entre variáveis.
· Na análise de uma função, os alunos devem identificar o domínio, o contradomínio e determinar imagens de objetos quando a função é dada por uma tabela, por um gráfico e por uma expressão algébrica.</td></tr>
</table>

Tabela 3. 4: Funções ao longo da escolaridade básica, até ao 7.º ano

Equações

As equações constituem-se como objeto de trabalho apenas no 3.º ciclo mas, a noção deverá ser trabalhada logo a partir dos primeiros anos, onde deverão aparecer equações muito simples e em que o objetivo é desenvolver o significado da relação de igualdade, das propriedades das operações e como cada uma das operações se relaciona com a sua inversa (Ponte et al., 2009a). No quadro seguinte apresento apenas o que foi previsto, na minha planificação, ao trabalhar com os alunos do 7.º ano de escolaridade.

3.º Ciclo – Álgebra (p.57)		
Tópicos	**Objetivos específicos**	**Notas**
Equações · Equações do 1.º grau a uma incógnita	· Compreender as noções de equação e de solução de uma equação e identificar equações equivalentes. · Resolver equações do 1.º grau utilizando as regras de resolução	· Os alunos devem relacionar os significados de “membro” e “termo”, e de “incógnita” e “solução” de uma equação. · Distinguir “expressão algébrica”, “equação” e “fórmula”. · Propor a resolução de equações simples antes da utilização de regras. · Na resolução de equações do 1.º grau, incluir casos em que: – a incógnita está presente num ou em ambos os membros da equação; – é necessário desembaraçar previamente de parênteses.

Tabela 3. 5: *Equações* no 7.º ano de escolaridade

Sequenciação dos tópicos

A partir da data em que o documento do programa de Matemática para o ensino básico passou a estar em discussão, que analiso os diferentes percursos que podem vir a ser realizados. Relativamente aos três tópicos da *Álgebra* aqui em estudo, tenho cimentado a opinião de que deveria ser feita uma planificação integrada dos três. Os materiais de apoio à implementação do PMEB (Ponte et al., 2009b) referem que, do ponto de vista didático, existe toda a vantagem em trabalhar estes tópicos de modo relacionado.

A meu ver, o tópico das *Sequências e regularidades* poderá surgir como impulsionador e aglutinador do estudo dos tópicos das *Equações* e das *Funções*, pois as sequências podem ser encaradas como funções de variável natural. Por outro lado, o trabalho com sequências realiza-se em contextos propícios à utilização e manipulação das ‘letras’ com significado onde, naturalmente, surgem as expressões algébricas e se podem criar situações em que, para calcular a ordem de um determinado termo da sequência, se formalize o conceito de equação. Ainda relativamente às *Equações*, os materiais atrás referenciados (Ponte et al., 2009b), evidenciam que, as equações constituem uma das formas possíveis de representar relações funcionais.

O conjunto de tarefas em que assenta este estudo pressupôs um trabalho inicial com o tópico das *Sequências e regularidades,* o qual serviu de base ao trabalho subsequente com *Funções,* e paralelamente foi introduzido o conceito de equação. Esta opção contrariou, parcialmente, o percurso apresentado pelo manual adotado, em que os tópicos *Sequências e regularidades* e *Funções* constituem respetivamente as unidades 2 e 3 (volume 1), mas as equações apenas surgem na unidade 6 (volume 2). A planificação anual que se realizou no início do ano letivo, pelos professores que lecionaram este ano de escolaridade, já previa a exploração sequencial destes três tópicos, mas não explicitava o trabalho integrado que eu vim a realizar (Anexo 1).

Em momentos de trabalho com outros professores, no âmbito do acompanhamento, surgiram duas ideias, que aqui registo: 1) Professores que defendem a lecionação das *Equações* antes das *Funções*, para que através da expressão analítica, se possa calcular o objeto, dada a sua imagem; e 2) Fazer a representação gráfica das sequências numéricas.

4. A escola, a turma e o grupo do Dinis

A escola

A escola onde leciono, desde 1994, situa-se na freguesia da Pontinha no Concelho de Odivelas. Esta localidade faz fronteira com os concelhos de Lisboa, Amadora e Sintra, tem uma forte concentração urbana e grande parte dela cresceu espontaneamente sem projetos de urbanização. É uma zona com características de 'dormitório' da cidade de Lisboa. Grande parte da população ativa trabalha no sector terciário, sobretudo no comércio, serviços de restauração e na construção civil. Existem também pequenas e médias indústrias no ramo da borracha, metalomecânica, colas, confeções, mármores e tinturarias[11].

O espaço físico da escola passou pelo programa de requalificação promovido pela empresa *Parque Escolar*, tendo a mudança para as novas instalações realizando-se no início do 3º período do ano letivo 2011/2012 (ainda faltam concluir as obras referentes aos espaços dedicados à prática da Educação Física). O novo edifício apresenta uma área bastante superior à da antiga escola, com uma melhoria qualitativa relativamente aos espaços e aos meios tecnológicos. Contudo, confrontamo-nos no dia-a-dia com condicionalismos, tais como, a falta de funcionários, de mobiliário novo e de equipamentos. A escola tem cerca de 900 alunos e 125 professores, tendo turmas do 7.º ao 12.º ano de escolaridade e cursos no âmbito do projeto *Novas Oportunidades*.

A turma

No ano letivo em que desenvolvi este estudo, por exercer funções de professora acompanhante, só lecionei duas turmas do 7.º ano de escolaridade. Pela análise do percurso escolar dos meus alunos e pelos primeiros conselhos de turma (em setembro de 2011) percebi que uma das turmas foi constituída, salvo honrosas exceções, por alunos que já tinham alguma retenção no seu percurso escolar e que não tiveram vaga na escola onde frequentaram o 2.º ciclo de escolaridade (a grande maioria dos alunos mudaram de escola contra a sua vontade). Alguns registos biográficos dos alunos revelaram grande falta

[11] Dados extraídos do Projeto Educativo da Escola Secundária Braamcamp Freire, 2009-2013

de assiduidade em anos anteriores e havia vários alunos em que a sua língua materna não era o português. Existia também um grupo significativo de alunos com contextos familiares muito frágeis. Todas estas variáveis faziam prever uma relação pedagógica com os alunos desta turma, cheia de desafios, e a necessidade de realizar um trabalho específico sobre aprendizagens que os alunos deveriam ter realizado anteriormente. Dado o descrito, escolhi desenvolver esta investigação com a colaboração dos alunos da outra turma que lecionava.

A turma era constituída por quinze rapazes e apenas seis raparigas, com uma média etária de 12 anos, todos de nacionalidade portuguesa e naturais da grande Lisboa. Com exceção de um aluno que vivia com os avós, os restantes viviam com o pai e/ou a mãe e somente dois residiam fora da freguesia. Apenas cinco alunos tinham apoio da ação social escolar. Relativamente ao percurso escolar, um dos alunos teve três retenções, quatro dos alunos tiveram uma repetência no seu passado, não tendo os restantes alunos tido qualquer retenção. No início do ano letivo, a disciplina preferida de oito alunos era a Matemática e quatro revelavam ser aquela em que tinham maiores dificuldades; cerca de doze alunos perspetivavam frequentar o ensino superior, seis completar o 12.º ano de escolaridade, dois deles ambicionavam frequentar um curso profissional e um afirmava ainda não saber o que pretendia do seu futuro escolar. As duas características que mais apreciavam num professor eram a assiduidade e a simpatia.

O número reduzido de alunos desta turma justificava-se por haver na sua constituição quatro alunos com necessidades educativas especiais (NEE). Segundo as informações recolhidas, junto da diretora de turma do ano anterior e analisando os processos dos alunos, perspetivava um grupo de alunos com hábitos de trabalho e gosto por aprender, mas ao mesmo tempo, a 'exigir' um maior acompanhamento dos alunos 'especiais'.

À medida que o ano letivo avançava, identifiquei um elevado nível de competitividade entre vários alunos, especialmente no que se referia aos resultados escolares. Durante as aulas era comum haver, por parte de alguns alunos, comentários depreciativos às intervenções menos conseguidas dos colegas. Assim, um dos focos de intervenção dos professores que constituíram o conselho de turma foi o desenvolvimento do respeito mútuo, do saber ouvir, aceitar e comentar de modo positivo as intervenções dos colegas. Houve bastantes episódios de indisciplina, centrados num grupo restrito de alunos, os quais foram sujeitos a uma diversidade de medidas de intervenção, as quais contribuíram para que não se agravassem.

A disciplina de Matemática podia ter uma intervenção significativa, por um lado, o fato de termos seis tempos letivos de 45 minutos por semana (3 blocos de 90 minutos) fazia com que estivesse muito tempo com os alunos, e por outro lado, indo de encontro às orientações do PMEB, pretendia desenvolver uma dinâmica de sala de aula com vista à criação de uma "comunidade matemática", em que o confronto de ideias estivesse na base da construção coletiva do conhecimento matemático. Assim, desenvolvi muitos esforços na criação de um ambiente de aula assente na partilha de ideias.

Habitualmente, os alunos desenvolveram as tarefas propostas a pares ou em pequenos grupos sendo depois realizada a discussão do trabalho desenvolvido com toda a turma, e feita uma síntese final das ideias matemáticas que surgiram[12]. Ao longo do ano letivo os grupos de trabalho foram sofrendo alterações, de modo a serem testadas as dinâmicas que melhor funcionavam. Tentei que os grupos de trabalho fossem heterogéneos, quer em termos de aproveitamento dos alunos na disciplina, quer relativamente ao sexo dos alunos e mantendo, se possível, a disposição dos alunos na sala (Abrantes, 1994). Nesta turma senti especiais dificuldades na organização dos grupos de trabalho, devido às características acentuadas dos meus alunos 'especiais', e aos fortes traços de personalidade, que não é muito comum identificar em alunos desta idade.

Relativamente ao aproveitamento na disciplina de Matemática, esta turma revelou, na globalidade, bons resultados. Os gráficos seguintes representam o aproveitamento dos alunos no final do 2.º ciclo de escolaridade (Figura 4. 1) e no final do 7.º ano de escolaridade (Figura 4. 2).

[12] A dinâmica de sala de aula será desenvolvida na introdução do capítulo 5

Figura 4. 1: Gráfico dos níveis obtidos pelos alunos, no final do ano letivo anterior

Os seis níveis inferiores a três, do final do 6.º ano, correspondiam a três alunos repetentes, dois de alunos com NEE e a sexta negativa foi de um aluno com percurso regular mas revelando falta de atenção, ausência de hábitos de trabalho e pouco acompanhamento em casa. No final do 7.º ano de escolaridade os alunos repetentes continuaram a ter avaliação negativa, num caso, devido a falta de assiduidade e nos outros dois, devido a graves problemas de indisciplina e falta de trabalho e empenho. Para além destes alunos, só um dos alunos com NEE manteve o nível negativo. Excetuando estes casos, todos os outros alunos tiveram um desempenho que lhes possibilitou terem um aproveitamento bastante bom, em que 43% dos alunos obtiveram nível 4 ou 5, conforme se verifica no gráfico seguinte (Figura 4. 2).

Figura 4. 2: Gráfico dos níveis obtidos pelos alunos, no final do 7.º ano

Na análise comparativa dos dois gráficos, confirma-se uma certa regularidade nos resultados: os alunos que obtiveram aproveitamento negativo no final do 7.º ano de escolaridade já o tinham obtido no final do ano letivo anterior e os alunos com níveis 4 e 5 mantiveram-nos. Dois dos alunos com aproveitamento negativo conseguiram obter nível positivo devido ao investimento que fizeram na sua aprendizagem, com trabalho na aula, em casa e com a frequência de salas de estudo.

O grupo de trabalho do Dinis

Durante a descrição da exploração das tarefas (capítulo 5) são feitas muitas referências ao grupo de trabalho do Dinis[13]. Nas primeiras três tarefas (secções A. e B.) este aluno trabalhou com o Damião, com o Zito e com a Carla. Depois, devido à relação 'explosiva' entre um dos alunos e o Damião, este deixou de fazer parte deste grupo vindo o Joel a integrá-lo. Estes cinco alunos pertenceram à mesma turma durante o 2.º ciclo de escolaridade, transportando desde essa altura alguns problemas de relação pessoal.

O Dinis é um aluno com nota 5 a Matemática em todos os períodos, desde o 5.º ano de escolaridade. O Joel, o Zito e o Damião são também alunos muito bons, com notas que oscilaram entre o 4 e o 5. Por sua vez, a Carla com aproveitamento de nível 3, teve no seu percurso a Matemática um nível 2 no primeiro período do 6.º ano de escolaridade. Neste grupo os rapazes dominavam, tomando sempre a iniciativa do trabalho. A Carla referiu-me que, neste ano letivo estava com melhor aproveitamento a Matemática e quando, passadas algumas aulas, a questionei sobre a sua integração no grupo afirmou que gostava do mesmo e que gostaria de continuar, embora se queixasse de ser a única rapariga. De seguida irei descrever um pouco de cada aluno, deste grupo de trabalho.

Dinis

O Dinis é filho de uma colega de escola, revelando sempre uma atitude muito discreta e correta, quer comigo, quer com os colegas. Embora por vezes parecesse meio adormecido era o primeiro a cumprir as tarefas. Escreveu num questionário, que apliquei no início do ano, que ocupava os seus tempos livres a jogar computador e curiosamente, a descansar. Ao ser questionado sobre a sua relação com a Matemática, disse que gostava e que era o "seu forte".

[13] Quando me refiro aos alunos utilizo pseudónimos

Quando queria intervir nas discussões, aguardava pacientemente pela sua vez, só falando quando lhe passava a palavra, nunca se sobrepondo às intervenções dos colegas. Muitas vezes olhava para ele, numa tentativa de ler na sua expressão facial se tinha algo a acrescentar. Revelava alguma preguiça em fazer os registos escritos, pois dizia já ter compreendido. Saliento que realizou sempre os trabalhos de casa propostos.

Zito

Se tivesse de descrever o Zito através de uma personagem 'tipo' diria que era o 'cientista'. Afirmava querer ser cirurgião. Era um aluno que despertava simpatia e revelou saber assumir as consequências dos seus atos, com grande sentido de justiça.

Mostrava-se habitualmente muito envolvido no trabalho, por vezes não conseguindo aguardar pela sua vez de intervir, contribuindo sempre com muito sucesso nas discussões coletivas. Outras vezes, quando lhe era pedido um trabalho individual, refugiava-se nos seus pensamentos, alheando-se dos acontecimentos. Os seus registos escritos eram algo desorganizados, refletindo a meu ver, o 'turbilhão' dos seus raciocínios.

Carla

A Carla era uma aluna muito discreta, só intervindo quando para tal era solicitada. Estava sempre atenta, registando cuidadosamente tudo o que era escrito no quadro. Nas tarefas mais exigentes manifestava dificuldades em realizá-las autonomamente, parecendo-me, por vezes, ser por falta de autoconfiança.

Damião

O Damião teve um ótimo desempenho, também reflexo do seu estudo em casa. Revelou ser muito competitivo e ter algumas limitações em termos de competências sociais, por exemplo, não sendo tolerante relativamente às dificuldades manifestadas pelos colegas. Tinha um ótimo raciocínio, evidenciou autonomia na realização das tarefas e liderou a maior parte dos grupos de que fez parte.

Envolveu-se em várias atividades extracurriculares, fazendo parte da equipa de golfe no âmbito do Desporto Escolar, jogava xadrez nos intervalos e participou em todos os concursos quer promovidos pelo Departamento de Matemática e de Ciências Experimentais (Olimpíadas das Matemática, Canguru Matemático e Olimpíadas da Ciência) como pelo

Departamento de Línguas (concurso de poesia, dia das bruxas, entre outros). Quanto ao seu futuro profissional dizia querer ser engenheiro informático ou civil, ou então, economista. Em várias situações comentou a atualidade política e económica o que não é habitual num jovem de 12 anos.

Joel

O Joel era um aluno muito correto e cumpridor, ficando mesmo envergonhado das atitudes menos adequadas dos colegas, mas não deixando de ser muito paciente com eles. Revelou capacidade de expor as suas ideias com clareza fora do comum, chegando os seus colegas a aplaudi-lo espontaneamente. No futuro, quer ser aquarista.

Quanto à sua relação com a Matemática, afirmava, no início do ano: "gosto um bocadinho mas tenho dificuldade". O aluno afirmava ter dificuldades, mas as suas notas provavam que, a serem verdade, ele as tinha conseguido ultrapassar com distinção.

5. As tarefas em aula

No início da minha carreira profissional investi significativamente na elaboração, experimentação e reformulação de tarefas com cariz exploratório, no contexto do projeto *Matemática para todos - investigações na sala de aula*[14] (MPT). Assim, desde há muito tempo que reconheço a riqueza pedagógica de tarefas mais 'abertas' e desafiantes para os alunos. Estas tarefas são caraterizadas por Ponte (2005a) como "comporta[rem] um grau de indeterminação significativo no que é dado, no que é pedido, ou em ambas as coisas" (p. 11).

O meu envolvimento no projeto MPT contribuiu para que, como professora, não me sinta desconfortável quando no desenvolvimento da atividade letiva surgem situações inesperadas sendo com agrado que me envolvo, com os alunos em raciocínios matemáticos, não previstos antecipadamente. Quando possível, aproveito as oportunidades de dar continuidade ao trabalho a partir dos seus contributos (Ponte et al., 1999). Ao longo de todo o meu percurso profissional tenho mantido a forte crença de que os meus alunos são capazes de ter sucesso em tarefas desafiantes. As suas produções têm-no provado.

Neste capítulo apresento as tarefas que utilizei e descrevo a atividade realizada por mim e pelos meus alunos, na exploração de cada uma delas. Estruturo a descrição do trabalho desenvolvido tendo por base as tarefas pois são elas, segundo Stein e Smith (1998) que constituem a base para a aprendizagem dos alunos. Antes desta descrição faço referência ao tipo de tarefas que privilegiei neste estudo e explicito as opções metodológicas que tomei que conciliam a minha visão sobre o ensino e aprendizagem da Matemática.

Apresentação geral

As tarefas que apresento neste estudo pretendiam proporcionar aos alunos a realização de um trabalho de cunho exploratório e visavam o aprofundamento de noções já trabalhadas, o desenvolvimento de novos conceitos e a progressiva formalização das ideias matemáticas envolvidas, apelando ao estabelecimento de conexões entre essas ideias. A

[14] Projeto que se desenvolveu no Centro de Investigação em Educação da FCUL, entre 1995 e 1999, e envolveu cerca de duas dezenas de docentes dos ensinos básico, secundário e superior (Ponte, Ferreira, Varandas, Brunheira & Oliveira, 1999).

seleção e elaboração das tarefas foram resultado da interpretação que faço do programa, tendo presente as características dos alunos a quem se destinavam e os recursos que, em cada momento, tive na escola.

Por si só, as tarefas não são determinantes no tipo de ensino que promovi. Seguindo as orientações do PMEB, a gestão curricular que realizei teve como orientação principal o proporcionar aos meus alunos uma aprendizagem da Matemática com *compreensão*, que eles a conseguissem *utilizar* em vários contextos e reconhecessem a sua *importância* e *beleza*. A minha estratégia de ensino identifica-se como já referi, com o *ensino exploratório*. É caracterizado por "o professor não procura[r] explicar tudo, mas deixa[r] uma parte importante do trabalho de descoberta e de construção do conhecimento para os alunos realizarem" (Ponte, 2005a, p.13) e integrar as contribuições dos alunos, na discussão do trabalho que, assim, influenciam o decorrer da aula. Pretendia que as tarefas propostas fossem desafiantes e matematicamente ricas e que permitissem aos alunos envolverem-se em atividade matemática genuína, valorizando tanto os resultados apresentados pelos alunos como os processos por eles utilizados.

A exploração das tarefas foi realizada pelos alunos organizados em grupo (salvo raras exceções). Esta forma de trabalho adequa-se à exploração deste tipo de tarefas pois estimulam o diálogo, a troca de ideias e a autoconfiança. Para além disso, estimula a divisão de trabalho entre os elementos do grupo, podendo cada aluno contribuir com o melhor que tinha para 'dar'.

No apoio aos grupos, a minha posição foi sempre de promover a autonomia dos alunos não deixando, no entanto, de intervir de um modo mais incisivo quando tal foi necessário. Regra geral, evitei apoiar em demasia dando apenas alguma pista quando foi necessário desbloquear algum impasse, optando por remeter as questões para o grupo e questionando de modo a incentivar os alunos a justificarem as suas respostas. Algumas vezes fui chamada para ser árbitra de conflitos: se foram de natureza relacional, tive uma intervenção ativa; se a discordância incidia nalgum aspeto relacionado com a resolução da tarefa, apelei à explicitação dos raciocínios envolvidos de modo a procurar convergências.

Também investi na criação de uma cultura de sala de aula assente no respeito mútuo, na capacidade de ouvir e intervir adequadamente, onde os alunos se sentissem à vontade para comunicar as suas dúvidas e dificuldades (Abrantes, 1994). Assim, através de pequenos problemas que fui propondo periodicamente desde o início do ano letivo, promovi o estabelecimento das normas sociais e das normas sociomatemáticas definidas no sentido de Yackel e Cobb (1996) que sustentam um ambiente de aula caraterizado pela explicação, justificação e argumentação. Investi também na criação de condições para que os alunos ouvissem os colegas atentamente, não emitissem juízos de natureza pessoal, argumentassem a favor ou contra o que ouviam, discutindo quando determinada intervenção era ou não relevante na discussão. Fui ainda um pouco mais longe, estimulando os alunos a reconhecerem entre duas estratégias aquilo que é diferente matematicamente e a identificarem as estratégias mais 'poderosas' em cada situação. Em alguns episódios de aula, quer do trabalho em pequenos grupos, quer do trabalho em grande grupo, que integram a descrição que vou apresentar nas secções seguintes, vejo refletidas algumas das normas 'contratadas' entre mim e os alunos.

Nos primeiros contatos destes alunos com estas tarefas é prioritário que dê aos alunos indicações claras das expectativas que tenho em relação ao trabalho que espero deles e que clarifique o tipo de apoio que terão durante a sua realização. A fase de introdução da tarefa tem grande relevância pois poderá influenciar o seu sucesso, principalmente com alunos que se estejam a apropriar deste tipo de tarefas (Fonseca, Brunheira & Ponte, 1999). As primeiras tarefas exploradas foram propostas aos alunos no início do 2.º período, numa altura em que estes já estavam mais familiarizados com este tipo de trabalho. Na descrição que farei de episódios de aula, confirma-se que alguns alunos já tinham um bom entendimento do que era pretendido, começando e desenvolvendo o trabalho de um modo bastante autónomo.

Na fase de exploração das tarefas pelos alunos, o tipo de intervenções que fiz junto dos grupos de trabalho contribuiu para a criação de um espírito de interajuda, no envolvimento e na valorização da participação de todos. Promoveu ainda o desenvolvimento da capacidade de raciocinar dos alunos, através da minha atitude questionadora, pretendendo levá-los a refletirem sobre o seu trabalho e a justificarem as suas respostas. Por outro lado, tentei durante esta fase não validar as descobertas de modo a manter o interesse e atenção dos alunos para a fase seguinte do trabalho. A estratégia que utilizei foi a de responder às questões com uma pergunta, ou direcionar a validação das respostas para o momento da discussão. Nos extratos dos diálogos que apresento na descrição do trabalho realizado com as tarefas, são vários os exemplos em que as minhas intervenções surgem na forma de interrogação e em que solicito, aos alunos, a avaliação do que é apresentado pelos seus pares.

O momento de discussão e síntese do trabalho realizado foi fundamental na sistematização e formalização de conceitos. Proporcionou ainda momentos onde os alunos puderam valorizar diferentes processos de resolução permitindo estabelecer conexões entre ideias matemáticas. Para mim constituiu o momento de aula mais difícil de gerir. Mais difícil porque alguns alunos ainda não tinham totalmente adquiridas as normas sociais. Conseguir ouvir criticamente o colega, estar atento de modo a verificar, por um lado, se o que o colega diz acrescenta algo de novo e, se assim for, tomar uma posição de concordância ou, se discordar, conseguir identificar e apresentar argumentos contra; por outro lado, se aparentemente o que é partilhado não traz nada de novo, conseguir encontrar conexões com o que já foi dito de modo a fundamentar a sua posição (Wood, 1999). Para além da constante negociação das normas, a dificuldade a que me refiro prendeu-se com o conseguir evidenciar as ideias relevantes envolvidas, compreender e fomentar as respostas às interrogações dos alunos e dar significado a contributos, por vezes pouco claros. E, por último, não perdendo de vista os objetivos estabelecidos para cada tarefa, realizar uma síntese em conjunto com os alunos, que integrasse o que foi explorado por eles com o que pretendia ver valorizado. Reconheço a importância desta fase da aula pois, como referem Bishop e Goffree (1986) a aprendizagem não resulta simplesmente da atividade que os alunos realizam, mas sim da reflexão que fazem sobre ela.

Por defender que os alunos devem ter um papel ativo na sua aprendizagem, foram solicitados a desenvolver muito trabalho autonomamente, a explicar os seus raciocínios e a justificar as suas opções. Foram também encorajados a comentar, construtivamente, concordando ou discordando das propostas dos colegas, procurando criar assim, uma comunidade em que é conferida alguma autoridade ao aluno, para além do manual e do professor. Assim, os significados foram sendo construídos de um modo partilhado, pelos alunos e por mim (Bishop & Goffree, 1986).

Para implementar um ensino exploratório que tem por base tarefas que envolvem um trabalho autónomo dos alunos e posterior discussão, a organização das aulas em tempos de 90 minutos veio facilitar a sua concretização. Aulas organizadas em 50 minutos levavam a que na maior parte dos casos, a discussão coletiva só se realizasse na aula seguinte. Este ‘adiar’ da discussão provocava por vezes o esquecimento de parte do que tinha sido realizado, até porque os seus registos escritos não eram suficientemente pormenorizados para os ajudar. Mas por outro lado, permitia-me, através das produções dos alunos, preparar melhor a discussão, quer na seleção do que seria apresentado, quer na sua sequenciação, quer mesmo ainda, na identificação das conexões entre as diferentes resoluções. Permitia ainda relacionar o que foi feito pelos alunos e as ideias matemáticas que pretendia realçar. Ao prever a exploração das tarefas em apenas um bloco letivo (2 aulas de 45 minutos sem intervalo), obrigou a uma antecipação mais pormenorizada do trabalho que os alunos poderiam vir a realizar com especial atenção nas dificuldades e uma monotorização do trabalho dos grupos tendo também como objetivo a sequenciação adequada da apresentação das resoluções (Stein, Engle, Smith & Hughes, 2008).

Na reflexão que realizei sobre trabalho desenvolvido houve uma componente que se prendeu com a avaliação, ainda que informal, da atividade desenvolvida e das aprendizagens dos alunos. Analisei de que forma os alunos reagiram à tarefa, como estavam a evoluir na aprendizagem das normas estabelecidas, em que conceitos, processos e representações demonstraram ter maiores dificuldades e em que medida conseguiam expressar as suas ideias matemáticas.

Descrição da exploração das tarefas: estrutura

A exploração das tarefas é apresentada em três secções[15]. A primeira secção (secção A) trata, em paralelo, duas tarefas referentes ao tópico das S*equências e regularidades*. Este tópico surge com conexões com o tópico das *Equações* na tarefa apresentada na secção seguinte (secção B) e com as *Funções* na última (secção C). Cada uma das secções estrutura-se em quatro pontos: (i) antecipação; (ii) exploração: ideias matemáticas; (iii) exploração: conexões; e (iv) síntese.

No primeiro ponto, *Antecipação*, descrevo aspetos referentes à planificação, dando especial atenção às ideias matemáticas e conexões exploradas. O termo antecipação designa uma das cinco práticas caracterizadas por Stein, Engle, Smith e Hughes (2008), no artigo “Orchestrating productive mathematical discussions: five practices for helping teachers move beyond show and tell”. Nesta prática, as autoras referem que a planificação vai para além de analisar a adequabilidade da tarefa ao nível e ao interesse dos alunos e aos objetivos estabelecidos. Envolve também antecipar como os alunos irão inter-

[15] Estas secções estão identificadas como A, B e C de modo a facilitar a descrição

pretar matematicamente o problema, o conjunto de estratégias corretas e incorretas que poderão usar e como as estratégias e interpretações poderão estar relacionadas com os conceitos matemáticos e representações envolvidos. A antecipação assim entendida permitirá também ao professor adquirir confiança com a matemática envolvida na tarefa e explorar todo o seu potencial .

Seguem-se dois pontos referentes à exploração da tarefa: ideias matemáticas e conexões onde dou conta da atividade realizada pelos alunos e da monotorização que realizei do seu trabalho. No primeiro identifico os conceitos, procedimentos e representações que foram explorados, ilustrando com transcrições de parte de diálogos. Incluo ainda extratos das produções escritas dos alunos e fotografias (estes instrumentos são também utilizados nos pontos seguintes). Relativamente ao ponto *Exploraçã*o: *conexões* saliento as conexões matemáticas concretizadas, dando especial atenção ao momento de discussão coletiva. Este ponto corresponde a uma das outras práticas discutidas no artigo acima referenciado, em que o professor ajuda os alunos a estabeleceram conexões entre as ideias matemáticas que estão envolvidas nas estratégias e nas representações que utilizaram. O estabelecimento de conexões, como dizem as autoras, mais do que consistir em apresentações sucessivas das resoluções dos alunos, pretende que estas "se apoiem umas nas outras para o desenvolvimento de ideias matemáticas poderosas" (p. 331). Esta prática tem propósitos diversos: o desenvolvimento das capacidades transversais, o desenvolvimento de capacidades mais específicas como o de representar, demonstrar, modelar e estimar e ainda institucionalizar conhecimento matemático novo (conceito, propriedade, procedimento, etc.).

Por último, apresento uma *Síntese* onde sumarizo os aspetos mais relevantes identificados em cada um dos pontos. Faço referência a dificuldades e fragilidades que os alunos revelaram e os progressos na aprendizagem que foram alcançando.

Nos extratos de produções dos alunos que incluo, embora estejam identificados com o nome do seu autor, resultam de um trabalho de grupo. Nos diálogos, as minhas intervenções estão identificadas como *Professora*. Esta descrição, pretendendo estar tão próxima quanto possível dos fatos, é contagiada com a minha interpretação, avançando com alguma análise dos dados que é desenvolvida no capítulo seguinte.

A. Voo em V e Azulejos

A lecionação do tópico *Sequências e regularidades* começou com o estudo de sequências pictóricas e das sequências numéricas a elas associadas. Antes do trabalho em aula com as tarefas *Voo em V* e dos *Azulejos*[16] (Anexos 2 e 3) que vou apresentar nesta secção, investi bastante na exploração de sequências numéricas, visando a formulação da lei de formação em linguagem natural pelos alunos e a determinação do termo geral de cada sequência explorada. Apresento em conjunto o trabalho realizado com as duas tarefas pois têm propósitos similares, envolvendo ambas as noções de termo e de ordem de um termo de uma sequência e a noção de termo geral da sequência, bem como a simplificação de expressões algébricas. Com estas tarefas pretendia também introduzir a noção de equação caso o trabalho desenvolvido pelos alunos proporcionasse a isso. Cada uma das tarefas contém uma sequência pictórica associada a um contexto da realidade (Figura 5.A. 1 e Figura 5.A. 2) o que, a meu ver, poderá ter ajudado ao envolvimento que os alunos evidenciaram na sua realização.

Voo em "V"

1. Algumas espécies de aves migratórias voam em bando, formando uma configuração em "V". Diversas equipas de cientistas têm investigado esta organização, procurando compreender as possíveis vantagens para o voo das aves e dos aviões.

Na sequência que se segue, cada figura representa um bando, cada ponto simboliza uma das aves que lhe pertence e, de figura para figura, o número de aves vai sempre aumentando.
Eis os quatro primeiros termos:

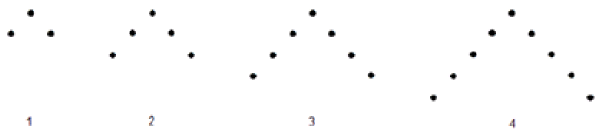


Figura 5.A. 1: Introdução da tarefa do *Voo em V*

Azulejos

1. A Sara construiu uma sequência de figuras utilizando pequenos azulejos brancos e cinzentos, dispostos do seguinte modo:

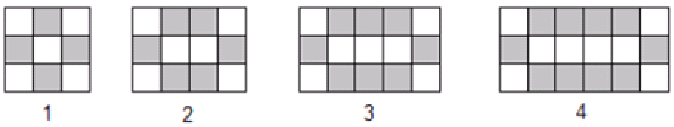


Figura 5.A. 2: Introdução da tarefa dos *Azulejos*

[16] Tarefas de apoio ao Programa de Matemática do Ensino Básico disponibilizadas pela DGIDC

A estrutura desta secção é apresentada no esquema seguinte:

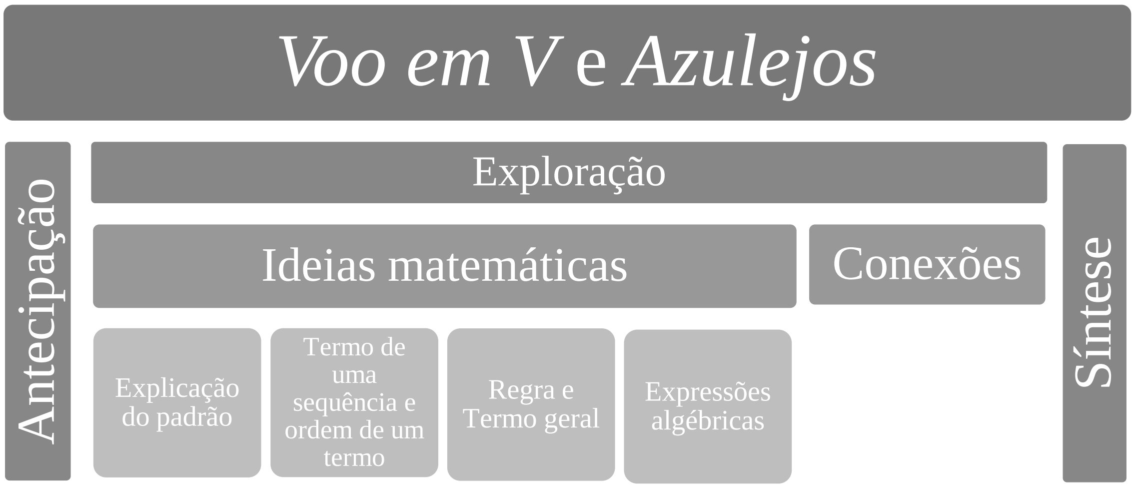


Figura 5.A. 3: Estrutura da secção

Organizei as ideias matemáticas exploradas em quatro pontos. Contudo, esta divisão não é estanque, havendo alguma permeabilidade entre o que é descrito nos três primeiros pontos dada a natureza das ideias envolvidas.

Antecipação

As primeiras questões de cada uma das tarefas tinham como objetivo que os alunos se apropriassem do padrão envolvido nas sequências propostas: na tarefa do *Voo em V* começa-se por pedir o número de pontos da figura imediatamente a seguir às figuras dadas no enunciado, e na tarefa dos *Azulejos*, pede-se o desenho das duas figuras seguintes às que são apresentadas. Com as questões subsequentes pretendia que os alunos consolidassem as noções de termo e de ordem de um termo de uma sequência. Com a intenção de aprofundar estas noções e contribuir também para a formulação da lei de formação das sequências pedia-se ainda, que os alunos se pronunciassem sobre se determinado valor podia ser termo da sequência numérica em causa e, caso a resposta fosse afirmativa, que indicassem a sua ordem.

Em ambas as tarefas pretendia que os alunos determinassem o termo geral das sequências envolvidas e esperava que, para o fazerem, utilizassem processos diferentes que conduzissem a expressões algébricas também diferentes mas equivalentes. Pretendia deste modo, abrir o caminho para a simplificação de expressões algébricas, num contexto que dá significado às letras presentes nas expressões e, caso o trabalho dos alunos o proporcionasse, introduzir a noção de equação e explorar métodos informais de resolução de equações. Antecipei também nestas tarefas a possibilidade de os alunos formularem e testarem conjeturas (por exemplo, nas questões 1.3. e 1.4. da tarefa do *Voo em V*) e a oportunidade de desenvolverem a capacidade de comunicar os seus raciocínios, investindo no momento da discussão coletiva da tarefa.

O enunciado de cada uma das tarefas seria disponibilizado aos alunos em suporte de papel. Na tarefa do *Voo em V* seriam alertados para não escreverem no enunciado pois estes seriam recolhidos.[17] Na tarefa dos *Azulejos,* uma vez que continha uma tabela para preencher, iria fornecer um exemplar por aluno, recomendando que escrevessem nele para economizarem tempo.

Na realização destas tarefas, era minha expectativa que os alunos manifestassem alguma facilidade na formulação da *regra* (questão 1.5. da tarefa do *Voo em V*), entendida como a explicação em linguagem natural da lei de formação de uma sequência. Por outro lado, previa que revelassem alguma dificuldade na compreensão da noção de termo geral e na sua determinação, nomeadamente nos últimos itens da tarefa dos *Azulejos*, em que se apresentam diferentes expressões algébricas para representar o termo geral da sequência numérica em questão, apelando a diferentes interpretações geométricas da sequência pictórica.

Um dos erros dos alunos que antecipei era que eles considerassem a relação entre a ordem de um termo e o termo correspondente como uma situação de proporcionalidade direta. Este erro podia ser favorecido pelo fato de as sequências numéricas envolvidas serem progressões aritméticas (a diferença entre dois termos consecutivos é constante).

A planificação que elaborei previa a exploração das tarefas em aulas de 90 minutos, consecutivas: uma para a tarefa do *Voo em V* e outra para a tarefa dos *Azulejos*, prevendo eu que a parte final da discussão desta última tarefa se realizaria na aula seguinte. Nesta tarefa, dada a sua extensão e o nível de dificuldade elevado das últimas questões, agendei parte da discussão para depois de os alunos terem resolvido os primeiros quatro itens. Como as aulas decorriam em monoblocos, tinha poucos meios tecnológicos ao dispor que me permitissem projetar a sequência pictórica que apoiaria a discussão. Assim, iria desenhar a sequência pictórica no quadro enquanto os alunos trabalhavam autonomamente, preparando apoio visual para a discussão.

[17] Devido a contenção na atribuição de número de fotocópias a cada professor, tenho optado por recolher alguns dos enunciados, de modo a reutilizá-los

Exploração: ideias matemáticas

Como tinha planificado, as tarefas foram exploradas em aulas consecutivas. Na apresentação do trabalho de cada uma delas, dei algumas orientações para a gestão do trabalho por parte dos alunos: as tarefas seriam resolvidas em grupo; cada elemento deveria ter a sua própria resolução; e defini o tempo dedicado à exploração de cada tarefa, antes da discussão coletiva.

A exploração da tarefa do *Voo em V* concretizou-se no tempo previsto, tendo a discussão coletiva acontecido nos últimos vinte e cinco minutos da aula. Na aula seguinte propus a tarefa dos *Azulejos* e pedi aos alunos que a resolvessem na mesma folha onde responderam às questões da tarefa anterior. A minha intenção era que ficassem com as resoluções agregadas de modo a que os alunos as pudessem facilmente consultar na aula em que trabalhássemos a tarefa seguinte (ver na secção B). A discussão coletiva da tarefa dos *Azulejos* ocupou a parte final da aula (cerca de 35 minutos) mas como tinha previsto não foi concluída, ficando para a aula seguinte a discussão das últimas questões.

Os alunos, nas duas tarefas, não revelaram dificuldades na compreensão do padrão existente em cada uma das sequências pictóricas. Em ambos as tarefas, iniciei a discussão pedindo aos alunos que apresentassem as descrições de cada padrão que traduziam os diferentes olhares perante as sequências. Aproveitei para alertar que estes diferentes modos de 'pensar a sequência' iria ajudá-los na determinação do termo geral respetivo.

Explicação do padrão

Um dos aspetos a que dei ênfase, como já referi, na discussão de cada uma das tarefas foi à explicação do padrão existente nas sequências pictóricas. Em cada uma das sequências pictóricas, os alunos analisaram as figuras que as compunham procurando identificar o que variava de figura para figura e como se caraterizava essa variação. Nas explicações de cada padrão refletiram-se os diferentes 'olhar' sobre as figuras.

No caso da tarefa do *Voo em V*, alguns alunos basearam-se na simetria de reflexão existente em de cada figura. A seguir, quando faço referência à obtenção do termo geral, esta conexão com a *Geometria* é evidenciada.

Outros alunos através de um raciocínio recursivo referiram que, de uma figura para a figura seguinte, o número de pontos "aumenta sempre dois". Esta estratégia recursiva foi também utilizada pelo António, na tarefa dos *Azulejos*, aquando da explicação do padrão, dizendo que de figura para figura, se acrescentava sempre mais três (à figura anterior). Depois de lhe ter pedido para explicar melhor, referiu que se acrescentava uma coluna:

> **António**: Reparei [aponta para a primeira figura da sequência desenhada no quadro] que aqui tinha 3 colunas, não é? E depois foi acrescentada mais uma coluna, aqui mais outra. Depois aqui 6 colunas e na próxima [figura] terá 7 [aponta para a figura 6 e conta as colunas].
> **Professora**: Mas há uma coisa que eu não compreendo. Se tinha sete, porque não poderá ser assim? [Desenho uma figura com sete colunas e com padrão diferente] Vamos ver se ele nos convence. Porque não era assim? Aguentem-se, é o António.
> **António**: Porque quando foi acrescentada a coluna, foi acrescentada aqui no meio. Não é?

Nesta mesma tarefa, a explicação que o Zito apresentou no quadro tem alguns pontos em comum com a explicação do António. Zito começou por dizer que no grupo, tinham descoberto os termos gerais das três sequências: da sequência que representa o número de azulejos cinzentos, da que representa o número de azulejos brancos e da referente ao número total de azulejos. Ao pedir-lhe para explicar apenas como ‘olharam’ para a sequência das figuras, o Zito referiu que, em cada figura, se acrescentava sempre 3 azulejos, 2 cinzentos e um branco, antes da última coluna da direita.

Houve todavia explicações diferentes do padrão da ‘sequência de azulejos’. O Mário, de outro grupo de trabalho, centrou-se na contagem dos azulejos cinzentos: associou o número de azulejos cinzentos da linha de baixo de cada uma das figuras, ao número dessa figura e completa dizendo como se distribuem os restantes azulejos cinzentos na figura número 5:

> **Mário**: É muito fácil, é assim [vai lendo o número da figura e apontando para os quadrados cinzentos na linha de baixo dessa figura]: eu vi 1, e um 1 aqui, 2, e 2 aqui, 3, 3 aqui, 4 e 4 aqui, 5 e 5 aqui. Mais 5 em cima, que tem de ser igual e um em cada ponta. É sempre igual - um em cada ponta.

Ao pedir para explicar a resposta à questão 1.2., em que era pedido o número de azulejos da figura 50, a Sara calculou os azulejos cinzentos de modo análogo ao do Mário e relativamente aos azulejos brancos explicou o modo como se distribuíam esses azulejos:

> **Sara**: Na figura 50, há cinquenta brancos no meio [querendo dizer na linha do meio] e em todos os cantos há azulejos brancos, que no total são 4.

A sequência pictórica na tarefa dos *Azulejos*, dada a sua simplicidade mas ao mesmo tempo variedade, proporcionou diferentes modos de a interpretar tendo promovido momentos de partilha entre os alunos, bastante ricos. Estes diferentes modos de 'olhar' a sequência favoreceram o aparecimento de diferentes expressões algébricas, aquando da generalização em linguagem formal.

Termo de uma sequência e ordem de um termo

Nas questões da tarefa do *Voo em V*, a ordem de um determinado termo é associada ao número da figura e o termo da sequência surge associado ao número de pontos de cada figura, como se pode ler no extrato do enunciado apresentado a seguir (Figura 5.A. 4).

1.1. Quantos pontos tem a figura seguinte desta sequência?
1.2. Quantos pontos tem a 100.ª figura (termo de ordem 100) desta sequência?
1.3. Existe, nesta sequência, alguma figura com 86 pontos? Se existir, indica a ordem que lhe corresponde.
1.4. Existe alguma figura nesta sequência com 135 pontos? Se existir, determina a ordem que lhe corresponde.

Figura 5.A. 4: Enunciado de algumas questões da tarefa do *Voo em V*

Os alunos do grupo do Dinis, ao iniciarem a exploração desta tarefa, ocuparam-se da descoberta do termo geral antes mesmo de responderem à primeira questão. No início do diálogo seguinte constata-se que o Zito estabeleceu uma conjetura que foi refutada pelo Dinis. Os contributos destes dois alunos, com a participação do Damião, culminaram na determinação do termo geral da sequência numérica:

> **Zito**: Já reparaste aqui numa coisa? Olha aqui o que acontece: [referindo-se ao ponto do topo da figura 1] 1, não é? É a ordem, *n+2*. 2 'bonequinhos'. À ordem junta-se mais 2.
> **Damião:** Isto é *n+2*.
> **Dinis:** *n+2*?
> **Damião**: *n+2*. Tipo, a este número está sempre a meter mais 2.
> **Dinis**: Não pode ser *n+2*. Tem de ser *n2+1*.
> **Damião**: Mas o *n* é o número de ordem.
> **Dinis**: Sim.
> **Damião**: Então não é.
> **Zito**: É sempre mais 2. Dinis é sempre mais 2.
> **Dinis**: É *2n+1*.
> **Damião**: Não! Espera. Olha lá aqui é 1+2, *n+2*.
> **Zito**: Eu também disse isso [o aluno apoia-se na sequência numérica que representa o número total de pontos para explicar o que se segue]. Daqui para aqui quantos vão? Vão 2. Daqui para aqui quantos vão? Vão 2. Daqui para aqui quantos vão? Vão 2. Daqui para aqui quantos vão? Vão 2. Por isso temos duas resoluções que podemos usar. Temos duas resoluções, Damião.
> **Dinis**: Eu gosto mais assim.
> **Damião**: *2n+1*? Como é que é *2n+1*?
> **Dinis**: Então olha lá: Não é de 2 em 2?
> **Damião**: Sim.
> **Dinis**: Se fosse 2n, começaria no 2, 4, 6, 8. Mas como é no 3, 2+1…
> **Damião**: Ah pois é, pois é.

Carla: Olhem, temos que fazer na folha.
Damião: Ainda não é. Vamos começar a responder às questões.

Quero realçar a referência do Zito aquilo a que ele denomina de “duas resoluções”: descobriram o termo geral e explicou como se definia a sequência, por recorrência. Contudo, os alunos na sua produção escrita, não registaram esta última explicação. Durante a resolução da questão 1.2., o Zito descobre o termo geral usando outro raciocínio, apoiado na estrutura geométrica de cada figura, que também não registaram na explicação do padrão:

> **Zito**: Olha, aqui tens ordem 1. Este lado [aponta para o outro dos lados da figura que representa o bando] é sempre mais um que a ordem. Imagina que este lado é o lado da ordem.

As respostas destes alunos às outras questões surgiram da aplicação do termo geral embora se preocupassem em confirmar os valores que iam obtendo através de ‘raciocínios geométricos’. Por exemplo, para obterem o número de pontos da figura número 100, imaginaram os 100 pontos que existiriam em cada um dos lados (excetuando o ponto do topo e considerando a simetria de reflexão existente em cada figura) e somam o ponto do topo, confirmando o total de 201 pontos que tinham obtido por substituição no termo geral do *n* por 100.

Neste grupo, quando é pedida a ordem de determinado termo, os alunos realizaram as operações inversas necessárias, como se pode verificar na resolução que apresentaram à questão 1.4. (Figura 5.A. 5). Nesta figura pode verificar-se que o Dinis registou o termo geral $n \times 2+1$ a seguir ao título, antes mesmo de responder à primeira questão.

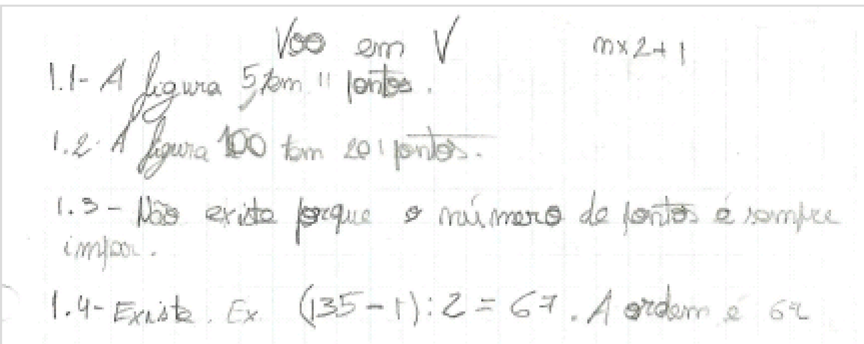


Figura 5.A. 5: Resolução parcial da tarefa do *Voo em V* do Dinis

Ouvindo a gravação da aula apercebi-me que os alunos recorreram, novamente, a outras estratégias para além daquelas que as suas produções escritas mostram. Por exemplo, em relação à questão 1.3., o Dinis partilhou o seguinte raciocínio:

> **Dinis**: 86:2-1… 42. Então espera: 42x2+1 é 85. Não, espera: 86-1 a dividir por 2. Não dá porque tu no final é que subtrais 1. [devendo ter dito ‘somas 1’].

O Dinis, por ter cometido um pequeno erro na ordem pela qual realizou as operações, obtém que o 86 é o termo de ordem 42. Ao realizar a verificação através da substituição do valor que obteve no termo geral, de imediato deteta o seu próprio erro. Não explicita mas, pelo que escreve na sua resposta (Figura 5.A. 5), deverá ter inferido que os termos da sequência numérica tinham de ser sempre números ímpares.

Na discussão coletiva, um dos alunos deste grupo de trabalho apresentou à turma o modo como chegaram à resposta da questão 1.3., mostrando que perceberam que o valor não é termo da sequência. Esta resolução, com base nas operações inversas pode ser vista na fotografia do quadro que apresento ao lado (Figura 5.A. 6):

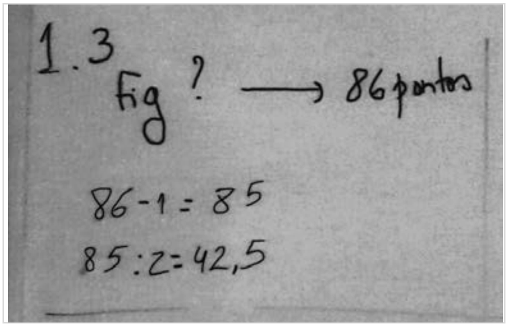


Figura 5.A. 6: Parte da resolução da questão 1.3. do *Voo em V* (fotografia do quadro)

O grupo da Sara justifica a resposta à questão 1.4., de um modo análogo ao grupo do Dinis, (Figura 5.A. 7) também assente no fato dos termos da sequência serem os números ímpares.

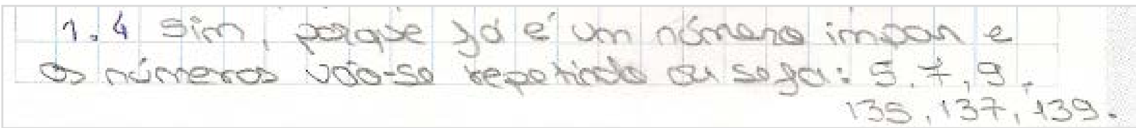


Figura 5.A. 7: Resolução da questão 1.4. da Sara

Repare-se no entanto, que não há uma justificação explícita de que a sequência do número de pontos contenha todos os números ímpares (a partir do 1) e que por isso o 135 seria termo da sequência. Todavia, há uma referência à repetição dos números podendo-se inferir que, pelo menos, os números cujo algarismo das unidades seja 5, 7 e 9 fazem parte da sequência, que conterá, portanto, o 135.

Nesta mesma questão, o grupo da Bruna chega ao valor da ordem do termo 135, realizando o algoritmo da divisão, mas não fica claro se fizeram uma interpretação correta do resto da divisão que obtiveram (Figura 5.A. 8).

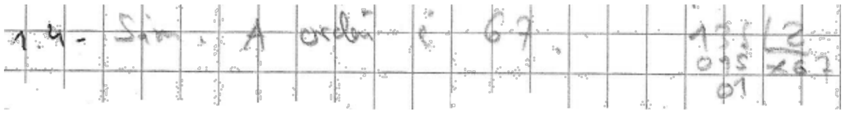


Figura 5.A. 8: Resolução da Bruna à questão 1.4

Nesta tarefa (*Voo em V)*, os alunos, na generalidade, não revelaram grandes dificuldades na compreensão dos significados de termo da sequência e de ordem de um termo porque, a meu ver, estes estavam apoiados no número de pontos de cada figura e no número da figura, respetivamente. A associação da ordem de um termo ao número da figura poderá ter sido facilitadora da distinção entre estas noções e em particular, do significado de expressões como 'termo de ordem…' que utilizamos correntemente no tópico das sequências e que habitualmente confundem os alunos.

Na tarefa dos *Azulejos*, relativamente à questão 1.3. em que se pedia "Que figura da sequência tem, no total, 81 azulejos?", houve alunos a apoiaram-se na representação geométrica para descobrir a ordem do termo da sequência pedida. O Joel explicou aos colegas que descobriu a ordem 25 por tentativas: ao valor 81 retira os seis azulejos que constituem as colunas de fora ficando com 75; experimenta se o 20 poderá ser o número de azulejos nas colunas interiores, obtendo 60; tenta o 30 e obtém 90; como é demasiado elevado experimenta o número 25, obtendo 75 pretendido. A Sara ao copiar a resolução que foi realizada no quadro com o contributo de vários alunos, regista erradamente os cálculos que o seu colega efetuou no quadro, dispondo-os horizontalmente ('o comboio de cálculos', como costumo designar junto dos alunos). No quadro não foi apresentado o 'comboio' mas, ao transcrever para o caderno, a aluna registou do modo que se pode ver na Figura 5.A. 9.

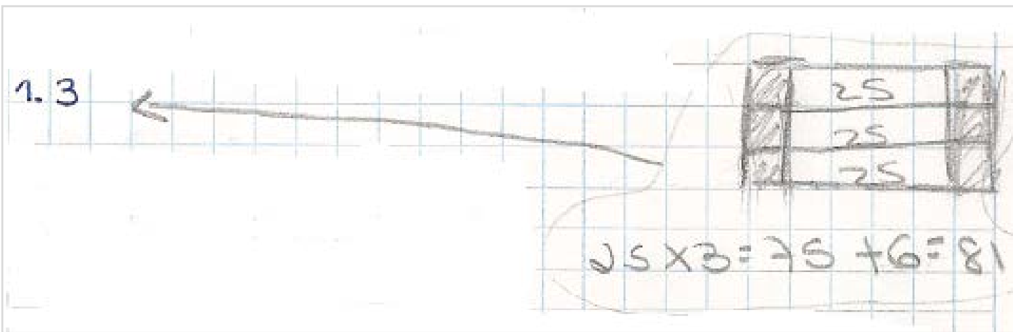


Figura 5.A. 9: Resposta da Sara à questão 1.3. da tarefa dos *Azulejos*

Na questão 1.8. (Figura 5.A. 10), o cálculo dos termos da sequência pedidos constituía um desafio diferente pois era proposto que utilizassem a expressão algébrica que tinha sido discutida na questão 1.6.

1.8. Recorrendo à expressão algébrica da Marta, $3\times(n+2)$:

a) Determina os termos de ordem 18 e 53. Na situação apresentada nesta tarefa, o que representam os valores que obtiveste?

b) Indica a ordem do termo da sequência que tem 294 azulejos.

Figura 5.A. 10: Enunciado da questão 1.8. da tarefa dos *Azulejos*

Os alunos do grupo do Dinis não respeitando as orientações dadas na questão, para obterem a ordem do termo pedida, aplicaram a mesma estratégia que tinham utilizado na exploração da tarefa do *Voo em V*: realizaram as operações inversas, tendo em conta o termo geral que já tinham descoberto ($3n+6$). Os restantes grupos não chegaram a resolver esta questão durante o trabalho autónomo.

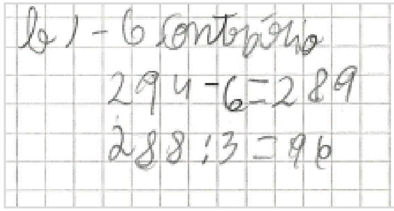
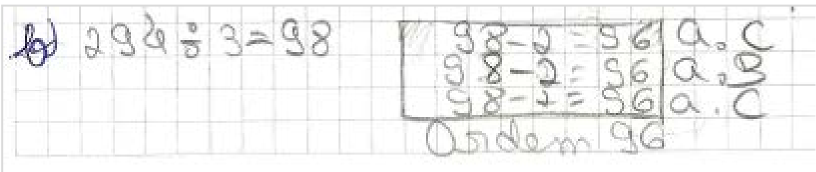


Figura 5.A. 11: Resolução da questão 1.8. da tarefa dos *Azulejos* do Dinis

O registo da Sara da resposta à alínea b) da questão 1.8. (Figura 5.A. 12) reproduz a resolução efetuada no quadro. Nesta resolução os alunos começam por dividir o total de 294 azulejos por três, referente ao número de linhas, e depois subtrair 2 para obter o número de azulejos centrais, que coincide com o valor da ordem, dando significado geométrico aos números e operações que surgem na expressão algébrica *3(n+2).*

Figura 5.A. 12: Registo da resposta a 1.8. b) da Sara, depois da discussão



Regra e termo geral

Na tarefa do *Voo em V*, os alunos apoiaram-se na sequência pictórica para chegar ao termo geral. Um aluno explicou, com o apoio de um esquema que se apresenta na fotografia ao lado (Figura 5.A. 13), que “a figura 4 tem 4 pontos em cada lateral e mais um no topo”. Logo, na figura *n*, seria *n+n+1*, que se vê numa fotografia mais à frente (Figura 5.A. 17). Como já referi, parece haver aqui um ‘aproveitamento’ da simetria de reflexão existente em cada figura.

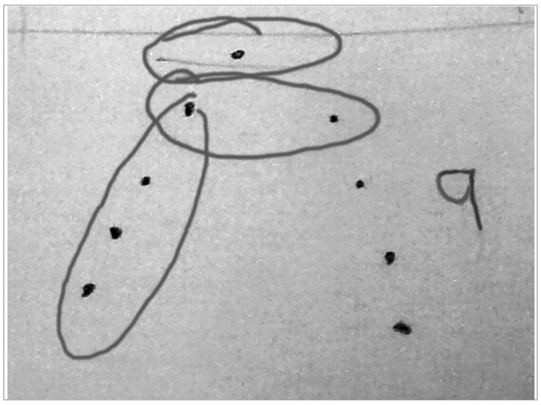


Figura 5.A. 13: Representação utilizada na discussão (fotografia do quadro)

Nas questões 1.5. e 1.6., pedia-se (Figura 5.A. 14):

1.5. Escreve uma regra que permita determinar o número de pontos de qualquer figura desta sequência.
1.6. Escreve uma expressão algébrica que traduza a regra descrita na pergunta anterior.

Figura 5.A. 14: Enunciado das últimas questões da tarefa do *Voo em V*

Analisando a produção escrita da Sara (Figura 5.A. 15) verifica-se que o seu grupo determinou corretamente o termo geral. A explicitação da regra que a aluna apresentou tem como base um raciocínio recursivo incompleto pois, não indica o valor do primeiro termo da sequência numérica.

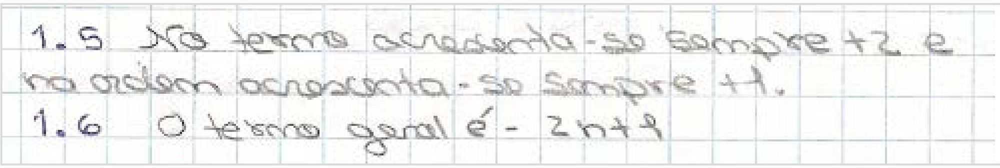

1.5 No termo acrescenta-se sempre +2 e na ordem acrescenta-se sempre +1.
1.6 O termo geral é - 2n+1

Figura 5.A. 15: Resolução parcial da tarefa do *Voo em V* da Sara

As questões 1.5. e 1.6. parecem ter suscitado alguma confusão pois vários grupos apresentaram a mesma resposta às duas questões, como se pode verificar na resolução da Bruna (Figura 5.A. 16).

Os alunos parecem não ter percebido o que era pedido ou deixaram de valorizar a descrição em linguagem natural sendo para eles mais importante o termo geral da sequência, bastando como regra.

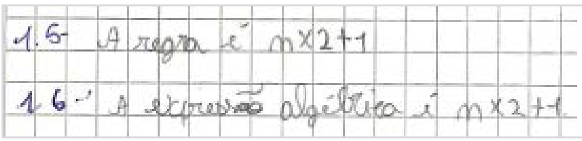

1.5- A regra é nx2+1
1.6- A expressão algébrica é nx2+1

Figura 5.A. 16: Resolução parcial da tarefa do *Voo em V* da Bruna

Como afirmava o Zito o “mais importante de tudo” é o termo geral. Isto é confirmado pelo fato do seu grupo iniciar o trabalho pela sua descoberta, mesmo antes de responder às primeiras questões pedidas, como já referi anteriormente.

Na tarefa dos *Azulejos*, os alunos, na generalidade, apoiaram-se na sequência pictórica associando facilmente a ordem de um termo ao número de azulejos cinzentos na zona central da linha inferior de cada painel e depois raciocinaram de modo a completar o termo geral. No grupo do Dinis, embora, logo no início, tenham determinado o termo geral, nas questões seguintes basearam-se na sequência numérica para confirmar se o termo geral definido estava ou não correto.

Expressões algébricas

Nestas tarefas, como já tinha referido na antecipação, pretendia trabalhar a simplificação de expressões algébricas. Na fotografia seguinte (Figura 5.A. 17), referente à discussão da tarefa do *Voo em V*, está ilustrado parte desse trabalho, aquando da discussão do termo geral da sequência numérica correspondente ao número total de pontos.

Surgiram as expressões $n+n+1$, $n×2+1$ e $2n+1$ tendo os alunos concluído serem todas equivalentes (multiplicação como adição de parcelas iguais e generalização da propriedade comutativa).

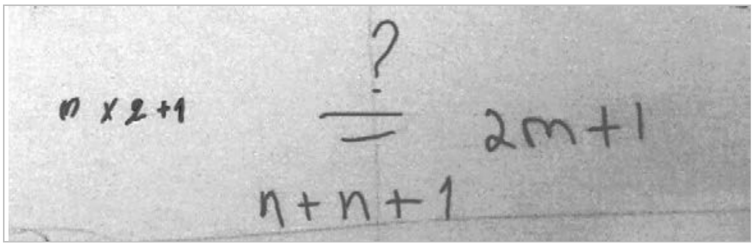


Figura 5.A. 17: Fotografia do quadro durante a discussão da tarefa do *Voo em V*

No momento da discussão da tarefa dos *Azulejos* houve contributos significativos dos alunos que levaram à simplificação das expressões algébricas. O extrato do diálogo informa como a simplificação de duas expressões algébricas foram justificadas por vários alunos, com intervenções espontâneas ou em resultado de uma solicitação minha, dirigida a uma aluna. O pedido específico à Carla pretendia avaliar se a aluna estava a acompanhar o excelente trabalho que o seu grupo estava a desenvolver.

> **Professora**: Porque é que isto é igual a isto? [Referindo-me a $(n+2)+(n+2)+(n+2)$ e $3n+6$]. Rute, porquê?
> **Rute**: Porque é três vezes o $n+2$: $n+2$, mais $n+2$, mais $n+2$.
> **Professora**: Pronto. Agora digam-me porque isto há-de ser igual a isto? [Referindo-me a $3(n+2)=3n+6$].

Paulo: Eu sei, eu sei. Porque *3n* é igual a 3 vezes o *n*.
Professora [escrevendo]: Porque *3n* é 3 vezes o *n*.
Paulo: E depois, 2 mais 2 mais 2 é igual a 6.
Professora: Como é que eu daqui chego aqui (apontando para o 3 e o 6)? Carla?
Carla: Dois vezes 3, seis.
Professora: Sabem como isto se chama?
Paulo: É uma expressão numérica.
Rui: Não! É algébrica
Professora: O que temos aqui é a propriedade distributiva….

Nos registos escritos da Rute (Figura 5.A. 18) que participa na discussão, e no da Sara (Figura 5.A. 19), apercebi-me do modo como estas alunas transcreveram o que foi registado no quadro (a Rute, na resposta à questão 1.7., esqueceu-se dos parênteses):

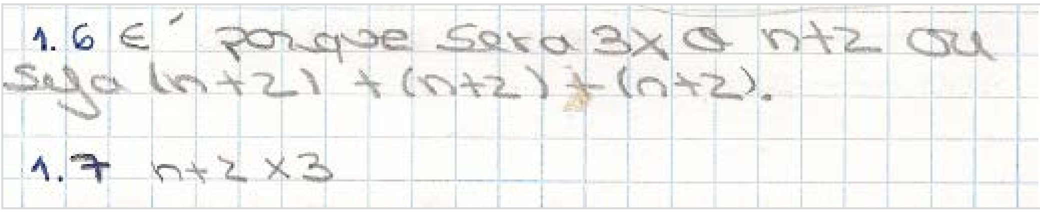


Figura 5.A. 18: Registo da Rute depois da discussão coletiva

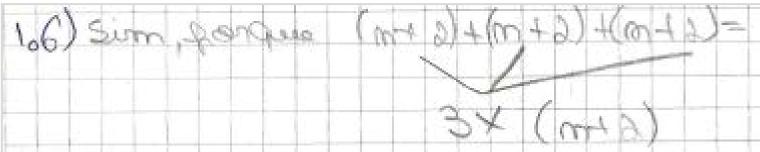


Figura 5.A. 19: Registo da Sara depois da discussão coletiva

Durante o trabalho de grupo, o Dinis tinha explicado à Carla: "É a mesma coisa que... Tens 3, certo? Tens 3 coisas, por isso mais vale por uma só, vezes 3". Com o contributo da Carla no diálogo anterior, parece-me que a aluna, com a ajuda do colega, conseguiu entender esta manipulação algébrica, ao ponto de a conseguir explicar à turma.

No diálogo seguinte que decorreu durante o trabalho em pequeno grupo, verifico que há uma tentativa do Zito em dar significado à parte numérica do monómio *3n*, enquanto o Damião pretendia um registo em conformidade com o que ouvia habitualmente:

Zito: Percebe-se melhor. É a ordem vezes 3.
Damião: Qual é o termo geral?
Zito: Qual termo geral? Há 3 termos gerais.
Damião: É *n3* ou *3n*?
Zito: É *n3*.
Dinis: É *3n* … Não, *n3*… bem é igual. Quer dizer, não é bem igual, mas pronto.

Zito: É melhor pores *n3*. Percebe-se melhor o que estás a dizer. É o *n* vezes o 3.
Damião: Não, não. *3n* é que é 3 vezes o *n*.
Dinis: É igual.
Zito: *3n* quer dizer que saltas de 3 em 3.
Damião: O que é que tu ouves mais dizer? *3n* ou *n3*?
Zito: *3n*. Mas ambos são válidos, meu!

Os alunos do grupo do Dinis, para confirmarem se determinada expressão algébrica representava o termo geral da sequência, decidiram experimentar com algumas ordens, não dando significado geométrico às expressões algébricas.

Contudo, não fazem qualquer referência às limitações deste procedimento. Estes alunos parecem 'prender-se' ao termo geral que determinaram não evidenciando esforços para interpretarem as expressões algébricas apresentadas no enunciado.

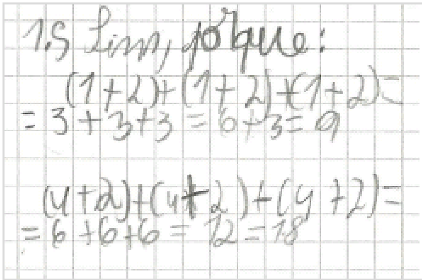


Figura 5.A. 20: Resolução da questão 1.5. da tarefa dos *Azulejos* pelo grupo do Dinis

Exploração: conexões

Na tarefa do *Voo em V*, se excluirmos o ponto do topo em cada figura, a relação entre o número da figura e o número de pontos do bando é uma relação de proporcionalidade direta. O grupo da Sara utilizou uma regra de três simples para obter o número total de pontos da figura 100 (Figura 5.A. 21).

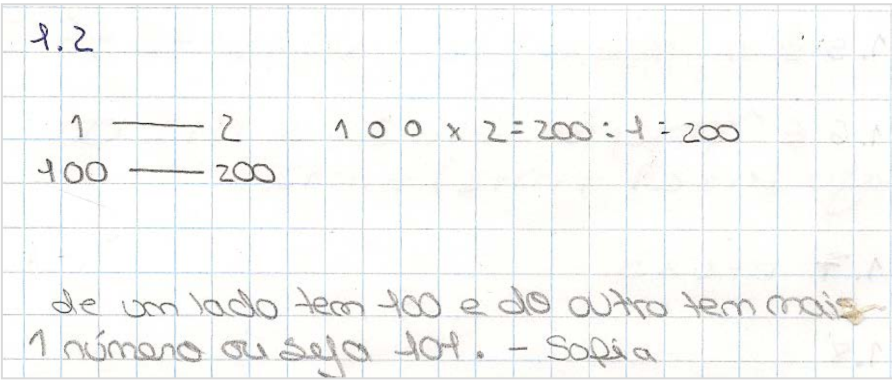


Figura 5.A. 21: Resolução da Sara à questão 1.2. da tarefa do *Voo em V*

A resolução da Sara não foi discutida no quadro pois só me apercebi dela quando posteriormente analisei as produções dos alunos, já depois da discussão coletiva. O António que tinha feito parte do grupo da Sara na exploração do *Voo em V*, na tarefa dos *Azulejos*, esteve a trabalhar sozinho, por razões de ordem disciplinar. Utilizou proporções para obter o total de azulejos da figura 50. Solicitei-lhe que fosse ao quadro partilhar com os colegas, o processo por ele utilizado:

> **António**: Eu neste exercício utilizei o exercício anterior em que tivemos de desenhar este [apontando para a figura 5 desenhada no quadro]. A figura 5 tem 21 quadradinhos, 21 azulejos. Posso fazer aqui a conta? Por isso fiz assim: fiz 5x10=50… não, calma!
> **Professora**: Vocês não devem estar a perceber, pois não? [Vários alunos responderam que não]. Vamos aguardar. António! Copia os cálculos todos que vais precisar, mas rapidamente.
> **António**: Vai dar 50… Por isso como usei aqui esta figura…50 … [atrapalhou-se na explicação].
> **Professora**: Deixa-me ver se eu percebi. Tu disseste que a figura 5 tem 21 azulejos. Ele tinha dito isto mas não escreveu. E agora?
> **António**: Tem 21 azulejos. Se nós multiplicarmos, ah… não… se multiplicarmos 10x21, que é a figura, que é os 5… [voltando a atrapalhar-se].
> **Professora**: Deixa-me dizer uma coisa antes. Eu acho que estou a entrar na cabeça dele. Se calhar vocês não estão! [Desafiando-os].
> **António**: Não consigo.
> **Professora**: Não tem mal, eu ajudo-te.
> **Zito**: Eu já percebi o que ele está a explicar.
> **Bruno**: Eu também já.
> **Professora**: Zito, já percebeste? Então diz lá.
> **Zito**: Como a figura 5 tinha 21 azulejos, bastava multiplicar por 10 para obter os azulejos da figura 50.
> **Professora**: Agora, meus queridos, a resolução da Sara deu 156. A resolução do António está a dar 210, certo? Estou a achar estranho! E vocês, não estão? Só ao António é que deu 210? A todos deu 156?
> **Bruno**: Claro é o único a que deu 210.
> **Zito**: Faça 50x3+6.
> **Professora**: Tens de me explicar o que é o 50, o que é ‘o vezes 3’ e ‘o mais 6’.
> **Zito**: Posso ir aí?

E a discussão continuou com a utilização do termo geral *3n+6* para que não restassem dúvidas de que a resposta correta era 156. Foi explicitado que o *3* relacionava-se com as 3 linhas cada uma com *n* quadrados (excetuando a primeira e última colunas) correspondendo o número seis aos 3 quadrados de cada coluna exterior. Recentrei a atenção no processo utilizado pelo António e o extrato seguinte permite dar conta do ambiente de desafio para os alunos, que tento criar:

> **Professora**: Está a dar 156. Parece que há algum problema com a resolução do António.
> **Bruno**: Um bocadinho, Stôra.
> **Professora**: Tentem lá descobrir! Eu sei que são capazes. Oiçam lá uma coisa: não tem qualquer problema que vocês, por vezes, apresentem um raciocínio que depois venhamos a ver que não está certo. Isso é ótimo que aconteça para que noutras situações, outros não cometam

esse erro. Todos concordamos que não funciona? Não? Estamos convencidos que é 156.
Vários alunos: Sim!
António: Eu ainda fico na minha, ainda.
Professora: Ficas na tua, não tem mal nenhum (…) Vamos testá-la. Isto é, em vez de fazermos logo com a figura 50, que nós não temos a certeza se isto funciona, vamos usar figuras que conhecemos os valores. Por exemplo,…

O Bruno interrompeu defendendo uma vez mais a resolução da Sara, mas voltei a focalizar a discussão na utilização de um procedimento que não se aplicava nesta situação em que tantas vezes os alunos erram:

Professora: Vamos ver porque a dele não está a dar certo.
Bruno: Ele fez mal as contas.
[Defendi que os cálculos estavam corretos].
Bruno: Porque fez mal a resolução.
Professora: Porque não se pode fazer?
Bruno: Porque nos termos gerais nunca se deve usar isso.
Damião: Não se pode usar proporções.
Bruno: Iá, a Stôra tinha dito que não se pode usar proporções [discutido noutra situação].
Professora: Eu tinha dito que não se pode usar as proporções? Porque é que não se podem usar as proporções?
Damião: Não sei.
Dinis: Não funciona.
Professora: Não funciona! Vamos ver porque não funciona. Vamos testar com a primeira e segunda figuras. A figura 1, quantos quadrados tem? Tem 9 quadrados, a figura 2, quantos tem? 12. Então se daqui para aqui se é vezes 2 então daqui para aqui também é vezes dois.
Damião: Porque as regularidades são sempre diferentes.
Professora: Não estamos perante uma situação de proporcionalidade direta. (…) Não há proporcionalidade direta. Aqui, o número da figura está a duplicar e o número de azulejos não duplica (…) Isto foi muito interessante ter acontecido, António, pois noutras situações já vão ver se é proporcional ou não.

A utilização quase indiscriminada das proporções por parte dos alunos, representada na maior parte dos casos por uma regra de três simples, deverá ser alvo de uma atenção especial, que a meu ver, poderá ser interdisciplinar, envolvendo as disciplinas de Geografia e Ciências Físico-químicas.

Na síntese que realizei da tarefa ainda chamei a atenção para a expressão geradora dos números ímpares. A sequência em estudo envolvia os números ímpares maiores que 1 e foi a oportunidade de explorar a expressão algébrica geradora de todos os números ímpares, relacionando-a com a expressão algébrica geradora dos números pares. Estas expressões têm que fazer parte do património matemático dos alunos e devem ser continuadamente reforçadas até que sejam adquiridas por todos os alunos (Figura 5.A. 22).

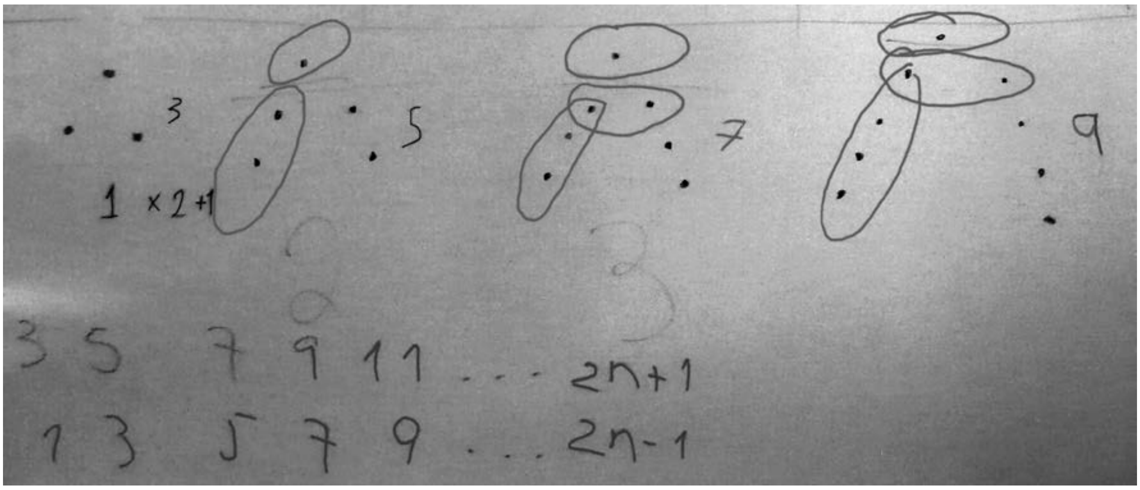


Figura 5.A. 22: Fotografia parcial do quadro com esquemas de apoio à discussão

Na tarefa do *Voo em V*, na questão 1.4., pedia-se, caso existisse, a ordem cujo termo era 135. Deparei-me com a resolução do grupo do Dinis que apresentava uma expressão numérica com a qual obtiveram a ordem pretendida (Figura 5.A. 23).

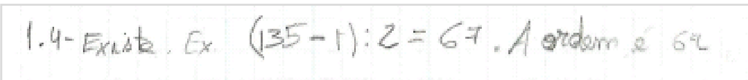

1.4- Existe. Ex (135-1):2=67. A ordem é 67

Figura 5.A. 23: Extrato da resolução da questão 1.4. do Dinis

Esta resolução, ao envolver a aplicação das operações inversas, preparava o terreno para a introdução da resolução de equações. Assim, na discussão com toda a turma, pedi ao Zito, para expor o raciocínio que fizeram mas registando os cálculos por etapas (Figura 5.A. 24), de modo a que fosse melhor apreendido pelos colegas.

No final, repare-se que o Zito teve o cuidado de efetuar a verificação substituindo no termo geral o valor da ordem encontrado. Tinha planificado que se esta estratégia surgisse a iria evidenciar de modo a abrir caminho à aplicação de estratégias informais de resolução de equações. Nesta altura, optei por ainda não introduzir a noção de equação, deixando-a para a tarefa seguinte.

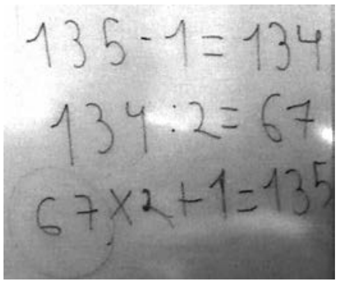


Figura 5.A. 24: Fotografia do quadro na discussão da questão 1.4. do *Voo em V*

Assim, no início da discussão coletiva da tarefa dos *Azulejos*, informei os alunos que iríamos introduzir uma noção nova – a de equação. Reforcei a ideia de que os temas matemáticos não são estanques, estando as noções interligadas e que deverão estar sensíveis a isso. Na discussão da questão 1.3. em que era pedido o número da figura com 81 azulejos, o Dinis apresentou como resolveram, utilizando o termo geral da sequência do número total dos quadrados.

> **Dinis**: Uma maneira mais fácil de fazer, sem tentativas (aludindo à resolução apresentada anteriormente pelo Joel). Fazemos 81 menos 6, que irá dar o 75.
> **Professora**: Porquê menos seis?
> **Dinis**: Porque é o inverso do que o Joel estava a fazer, os 3 de cada lado.
> **Bruno** [ao mesmo tempo]: É das colunas que são seis de lado.
> **Dinis**: Isto é o termo geral que é $3n+6$. Fazemos ao contrário que é 81 menos 6 e depois o 75 a dividir por três [ao mesmo tempo escrevia no quadro].

Alguns alunos manifestaram não terem percebido, mas a dificuldade prendia-se com a compreensão do termo geral. Depois de ter sido explicitado, avancei para a introdução da noção de equação:

> **Professora**: Sabem o que temos aqui? [Aponto para a condição $3n+6=81$, escrita no quadro pelo aluno] Isto chama-se, em Matemática, uma equação. O que é uma equação? Qual é a diferença entre 'isto' e as expressões numéricas que deram no ano passado?
> **Dinis**: Porque tem ali um *n*.
> **Paulo**: As letras.

Este pequeno extrato revela o início da construção de noção de equação em que os alunos referem que a par dos números surgem letras não fazendo referência ao sinal de igual. Fui avançando na análise da condição, identificando as diferenças com as expressões numéricas (em conjunto com os alunos) e discuti com eles o papel das equações. Ainda com a participação deles, resolvi a equação aproveitando as estratégias informais atrás propostas, agora num registo mais formal, mantendo a incógnita. A seguir apresento o registo escrito do Dinis (Figura 5.A. 25) em que há referência à equação e verifico que o aluno não transcreveu para a sua folha, a resolução que efetuámos no quadro.

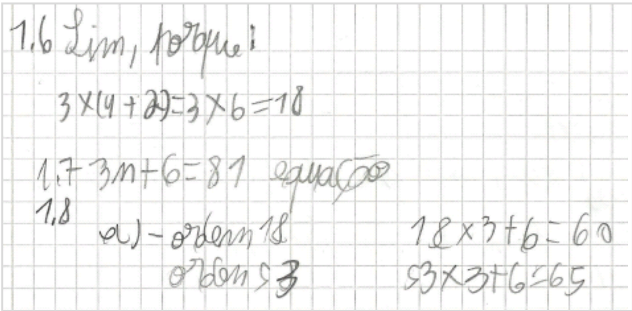


Figura 5.A. 25: Resolução do Dinis das questões 1.6., 1.7. e 1.8.

A introdução da noção de equação decorreu mesmo no final da aula, em que os alunos já manifestavam alguma inquietude. Na aula seguinte planeava consolidar esta conexão: obter o valor da ordem de determinado termo, através da resolução de uma equação, utilizando estratégias informais.

Nestas tarefas reforcei as diferenças existentes entre expressões numéricas e expressões algébricas e entre uma expressão algébrica e uma equação. Houve ainda a oportunidade de recordar a propriedade distributiva da multiplicação relativamente à adição, trabalhada até ao momento, unicamente num contexto aritmético.

Síntese

A associação da noção de ordem de um determinado termo ao número da figura, que surgiu na tarefa do *Voo em V*, parece ter contribuído para a compreensão desta noção. Esta associação poderá ser 'poderosa' se os alunos se recordarem dela.

Talvez pelo fato de os alunos terem explorado tarefas do manual em que era pedido o termo geral e onde já não era pedido a formulação da lei em linguagem natural, parece que deixaram de valorizar este tipo de generalização em detrimento de uma 'fórmula matemática poderosa'. Isto parece ser confirmado quando alguns alunos utilizaram raciocínios recursivos para descrever as sequências numéricas não os registando. Aparentemente valorizam mais o termo geral da sequência, que como um aluno diz, "é o mais importante". O enunciado da questão deveria ter sido adaptado de modo a que fosse mais claro que se pretendia a descrição da lei de formação em linguagem natural.

Há evidência de que as sequências pictóricas foram essenciais na descoberta do termo geral da sequência numérica pedida e que a estrutura geométrica apoiou a atribuição de significado às letras utilizadas na expressão algébrica.

Em contextos que envolvem uma taxa de variação constante é previsível que os alunos utilizem raciocínios proporcionais mesmo quando estamos perante relações que podem ser representadas por uma expressão algébrica do tipo $an+b$, $b\neq 0$, a e $b \in Z$. Os alunos cometem este erro de um modo recorrente, mesmo depois de confrontados com ele.

Os alunos são capazes de dar significado aos monómios e expressões algébricas que utilizam para traduzir generalizações. Por isso, para eles fará mais sentido, nalgumas situações, que na expressão surja *n3* em vez de *3n*.

A introdução da noção de equação surgiu de um modo natural, apresentando-se como um instrumento matemático poderoso na obtenção de valores desconhecidos. As estratégias informais utilizadas pelos alunos foram valorizadas. Esta conexão com as equações (que constituía uma unidade a ser trabalhado mais tarde) permitiu sensibilizar os alunos de que os temas matemáticos não são estanques.

Na análise das resoluções dos alunos destas tarefas constato que oralmente alguns alunos são brilhantes mas os seus registos escritos, quer do trabalho em pequeno grupo, quer resultante da discussão coletiva, têm de ser melhorados.

B. Termo Geral de Sequências e Equações

A tarefa que apresento nesta secção foi estruturada por mim, surgindo na sequência da exploração das tarefas do *Voo em V* e dos *Azulejos*, apresentadas na secção anterior. Relembro que na tarefa dos *Azulejos* a partir do trabalho desenvolvido por um grupo, foi introduzida a noção de equação, no final da discussão coletiva.

Ficha de Trabalho
Prof: Catarina Ferreira

Conexões

Nome do Aluno: *Turma:* *Nº:* **Data: / /**

Termo Geral de Sequências e Equações

A seguir é indicado o termo geral de algumas sequências. Para cada um deles responde ao pedido. Recorda que **n** representa a ordem do termo da sequência.

Termo Geral	*Calcula*	*Explica o teu raciocínio por palavras*
n+2	O primeiro termo	
	A ordem cujo termo é 20	
	O que representa n+2 = 40? Determina o valor de n.	

Figura 5.B. 1: Parte do enunciado da tarefa *Termo Geral de Sequências e Equações*[18]

A estrutura desta secção é apresentada no esquema seguinte:

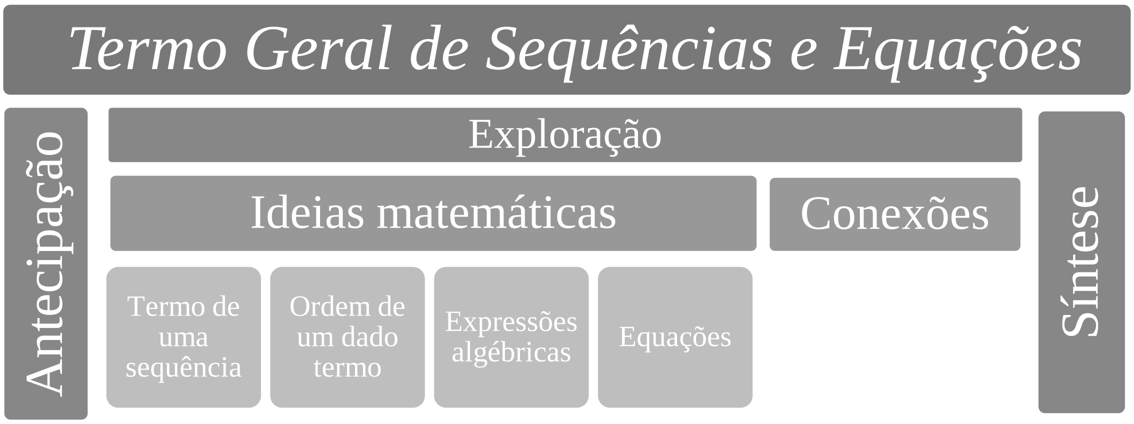


Figura 5.B. 2: Estrutura da secção

[18] A tarefa encontra-se na íntegra, no final (Anexo 4)

As ideias matemáticas exploradas nesta secção estão também organizadas em quatro pontos. As três primeiras dão continuidade ao já trabalhado na secção anterior e surgem, com lugar de destaque, as equações.

Antecipação

Ao construir esta tarefa pretendia consolidar a noção de equação a partir da exploração das sequências, capitalizando o trabalho desenvolvido com o termo geral de uma sequência numérica. Tinha planificado que a primeira abordagem à noção de equação fosse contextualizada, surgindo a incógnita associada à ordem de um determinado termo de uma sequência.

Contava que os alunos, nesta tarefa (*Termo Geral de Sequências e Equações*), ao resolverem as equações que envolviam o termo geral das sequências estudadas, se apoiassem nas estratégias que tinham desenvolvido durante a exploração das tarefas anteriores. As resoluções dos alunos, dessas tarefas, seriam devolvidas para que as pudessem consultar se considerassem necessário.

A tarefa *Termo Geral de Sequências e Equações* está estruturada a partir de três expressões algébricas que representam os termos gerais de três sequências: i) a primeira, $n+2$, mais simples em que pretendia retomar as noções de termo da sequência e de ordem de um dado termo; perguntei o que representava $n+2=40$, esperando que respondessem que era uma equação e/ou que permitia descobrir a ordem do termo 40; ao pedir para resolver esta equação tão simples (equação aritmética com apenas uma incógnita e que surge apenas no primeiro membro) esperava que os alunos, de imediato, indicassem a sua solução, atendendo ao significado da operação envolvida, explicitando ou não a utilização da operação inversa da adição; ii) com o termo geral $2n+1$, que surgiu na tarefa do *Voo em V*, pedia a ordem de dois termos da sequência, referindo-me ao número da figura; os termos pedidos correspondem a valores de ordens muito fáceis de calcular, tendo por base a simetria de reflexão existente em cada figura ou a manipulação das expressões algébricas; e iii) a partir do termo geral da sequência do número total de *Azulejos* $(3n+6)$, era pedido o número da figura com um determinado número total de azulejos e, logo de seguida, o número da figura que tem um total imediatamente a seguir ao anterior (situação impossível). Com estas duas questões pretendia verificar se os alunos as resolviam independentemente ou se, com espírito crítico, baseavam a resposta à segunda questão na resposta que tinham dado na anterior. Relativamente aos dois últimos termos gerais voltava a pedir que resolvessem equações.

Para finalizar a tarefa, os alunos tinham de explicar como resolver uma equação. O objetivo deste item era levar os alunos a uma reflexão sobre os procedimentos informais que intuitivamente mobilizaram na resolução das equações realizadas anteriormente. Com esta tarefa pretendia que os alunos, com base nos seus conhecimentos aritméticos, desenvolvessem estratégias informais de resolução das equações, antes da aprendizagem de métodos formais.

No início da aula em que iria explorar esta tarefa discutiram-se as últimas questões da tarefa dos *Azulejos* descrita na secção anterior. Só após a conclusão deste trabalho se iniciou o trabalho em grupo. A constituição dos grupos não foi alterada pois pretendia manter e 'alimentar' as dinâmicas já criadas. É minha convicção que é vantajoso manter a constituição dos grupos de trabalho enquanto se trabalha um conjunto de tarefas que se interligam. Os alunos deveriam resolver a tarefa no próprio enunciado. Provavelmente a discussão só se realizaria na aula seguinte.

Exploração: ideias matemáticas

A tarefa revelou-se repetitiva, com os alunos a manifestarem algum aborrecimento. Ouvindo as gravações dos grupos, percebi que se dispersaram em conversas extra tarefa a partir do momento que esta deixou de constituir um desafio. O Dinis chegou a dizer-me: " É sempre o inverso do termo geral! Qual é a dificuldade disto, Stôra?". O fato de ser sexta-feira e ser a última aula, antes do fim-de-semana, também não ajudou a que fizessem um trabalho cuidado.

Como antecipei, a discussão só foi possível ser realizada na aula seguinte mas permitiu que a preparasse, a partir das produções escritas dos alunos. Fiquei um pouco dececionada quando percebi que os alunos, ou investiram pouco na questão final, ou mesmo a deixaram em branco. A discussão coletiva centrou-se na última questão de cada secção da tarefa.

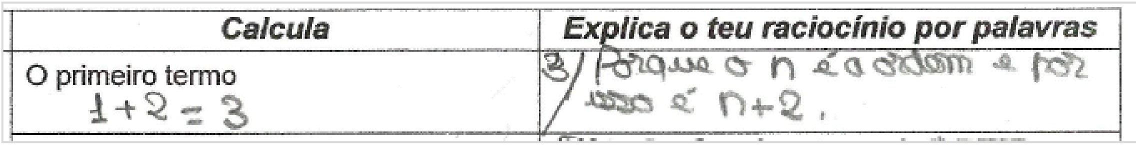
Com esta tarefa retomaram-se as noções de termo de uma sequência, de ordem de um termo e, com particular atenção, a noção de termo geral; a tarefa promoveu também algum trabalho de manipulação algébrica embora inicialmente não tivesse sido definido como objetivo. Aprofundou o trabalho com as equações.

Termo de uma sequência

A tarefa pedia o primeiro termo da sequência cujo termo geral é *n+2* (Figura 5.B. 1). Este termo geral não estava associado a uma sequência pictórica mas alguns alunos relacionaram o valor da ordem de um termo, com o número da figura. Por exemplo, durante o trabalho de grupo um aluno, embora não pertencendo ao grupo do Zito, perguntou-lhe o que era a ordem ao que ele respondeu - “a ordem é o número da figura”. Esta associação é realizada também pelo Dinis quando, durante o trabalho de grupo referiu: “Sabemos que aqui o termo geral é *n+2* por isso vai ser a figura mais dois. Por isso o primeiro termo vai ser 3”. A Carla questionou-o sobre o que ele tinha feito:

> **Carla**: Não estou a aperceber! Então aqui é para dizer o quê?
> **Dinis**: Tens o *n+2*, certo? O *n* vai dizer que é…
> **Carla** [interrompendo]: Que é a ordem. Que é o quê?
> **Dinis**: Que é a ordem, sim. A figura. O número da figura. Por isso fazes o número da figura mais 2.
> **Carla**: Isso é o primeiro termo?
> **Dinis**: O primeiro termo é 3.
> **Carla**: Então, como é que fizeste?
> **Dinis**: Então, o primeiro termo: se é 1+2, fazes mais 2.

No registo escrito da Carla, que se pode ver na figura seguinte (Figura 5.B. 3), ela apresentou uma explicação que não permite inferir se terá entendido o que estava em questão, embora tudo o que registou esteja correto.

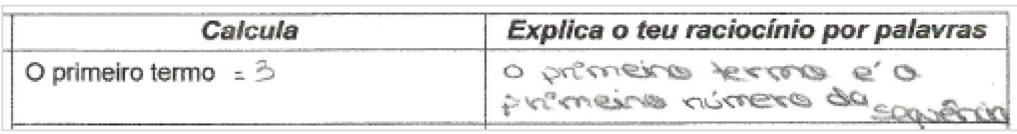


Calcula	Explica o teu raciocínio por palavras
O primeiro termo 1+2 = 3	3/ Porque o n é a ordem e por isso é n+2.

Figura 5.B. 3: Resolução da Carla da questão que pedia o primeiro termo

O uso da associação da ordem de um termo ao número da figura, mesmo quando não existe uma sequência pictórica, parece ter funcionado como uma ‘âncora’, facilitando a compreensão da noção envolvida.

Por seu lado, a Rute revela ter a noção que o primeiro termo da sequência é o “primeiro número da sequência” mas não explica como obteve o valor 3 (Figura 5.B. 4).



Calcula	Explica o teu raciocínio por palavras
O primeiro termo = 3	o primeiro termo é o primeiro número da sequência

Figura 5.B. 4: Resolução da Rute da questão que pedia o primeiro termo

Ordem de um termo da sequência

Os grupos de trabalho desenvolveram estratégias diferentes para a obtenção dos valores das ordens dos termos pedidos. Os alunos do grupo do Dinis obtiveram esses valores através do termo geral, realizando as operações inversas necessárias, ao que eles designaram por "fazer o contrário" ou o "inverso". O Dinis ajudou novamente a Carla a compreender como podia obter a ordem:

> **Dinis**: Aqui tens o termo 20, certo? Então tu tens de fazer o contrário para descobrir a ordem. Percebeste?

A colega respondeu-lhe que não e o Dinis explica-lhe de novo como obteve o termo:

> **Dinis**: Aqui tens o termo que é 20 e queres descobrir a ordem. Por isso fazes o inverso que é …
> **Carla** e **Dinis**: 20-2.
> **Dinis**: Que vai dar 18.

Alguns alunos revelaram um bom domínio da noção de ordem de um termo de uma sequência. Repare-se na explicação que o Joel deu quando justificou o cálculo do valor da ordem cujo termo é 20 (Figura 5.B. 5). Este aluno mostrou, nos momentos de discussão coletiva, uma capacidade de explicar oralmente os seus raciocínios com simplicidade e clareza, que foi reconhecida pelos seus pares.[19] E nesta justificação escrita, essa capacidade também se evidenciou.

A ordem cujo termo é 20	A ordem é 18. Porque se eu somo para têr o têrmo, sultraí-o pra ter a ordem

Figura 5.B. 5: Explicação sobre a obtenção da ordem apresentada pelo Joel

Expressões algébricas

A Rute manipulou a expressão algébrica que a ajudou a obter a ordem do termo 1001. Na resolução apresentada de seguida (Figura 5.B. 6) verifica-se que decompôs o $2n$ em $n+n$. Lendo a sua explicação escrita, esta aluna parece compreender que a expressão algébrica representa um valor numérico quando é concretizado o valor da variável. Identifico uma vez mais, a disposição horizontal dos cálculos onde não é respeitada a equivalência da relação de igualdade (*"500+500=1000+1=1001"*).

[19] Este aspeto foi referido na caraterização do aluno.

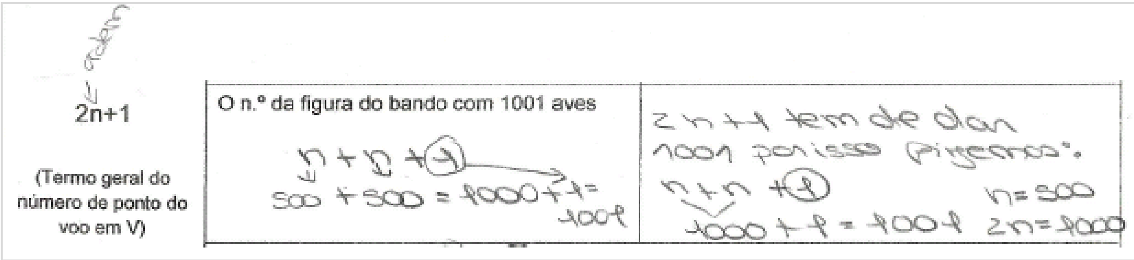


Figura 5.B. 6: Resolução da Rute do cálculo da ordem do termo 1001

Repare-se ainda que a aluna reconheceu que *n* representa o valor da ordem de um termo genérico. Indica que $n=500$, não dizendo claramente que é a figura 500 que terá 1001 aves. Com a análise destes registos confirmo que estes alunos precisam melhorar as suas justificações escritas.

Equações

Nesta tarefa, para cada um dos termos gerais é apresentada uma equação que permite calcular o valor da ordem correspondente ao termo que surge no segundo membro. Era pedido que os alunos explicassem o que representava a equação e que determinassem o valor de *n*. Eu recordo que estes alunos tinham visto uma equação pela primeira vez, no final da aula anterior. No grupo da Rute, o Paulo começou por ler em voz alta a tarefa e quando chegou à equação $n+2= 40$, os alunos de imediato indicaram a sua solução. Quando o Paulo sugeriu que começassem a responder às questões da tarefa manifestaram não saber o que era o primeiro termo. Depois de eu os ajudar, responderam às questões seguintes sem dificuldade. Aparentemente, a noção de equação é acessível aos alunos e a obtenção da solução de equações deste tipo parece ser intuitiva.

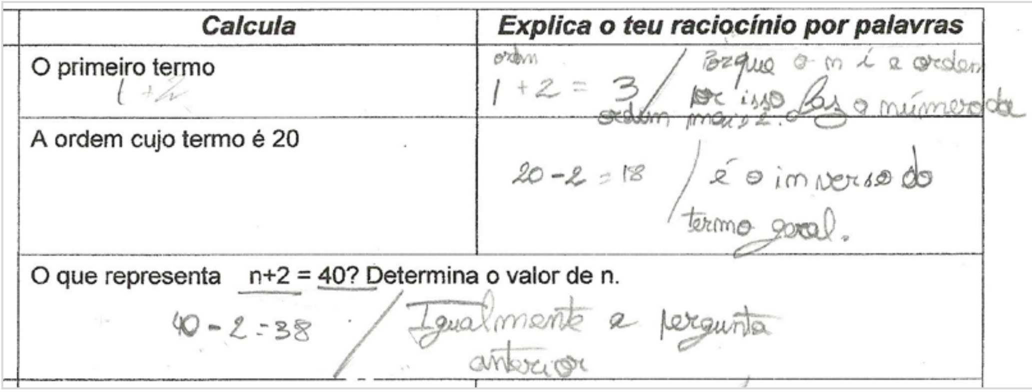
Ainda relativamente à primeira equação que surge, $n+2$=40, o Dinis manifestou não estar a compreender o que era pedido e o Zito tomou a iniciativa de explicar-lhe, mesmo sem ele ter pedido ajuda. Contudo, a dúvida do Dinis, não estava na determinação da incógnita, mas no que representava a condição:

> **Dinis**: Esta aqui eu não percebi.
> **Zito**: Qual? [lendo] O que representa … Determina o valor de *n*. É só para determinar o valor de *n*, meu. É fácil! É 38.
> **Dinis**: Sim, 38 já percebi. Espera aí, deixa-me voltar atrás.
> **Zito**: Como neste termo geral temos de somar a ordem com mais 2, para a ordem inversa seria tirar dois pontos… dois ao 40.
> **Dinis**: Sim, mas o que representa isto? [referindo-se a $n+2=40$]
> **Zito**: Mas é só para determinar o *n*.
> **Dinis**: Olha para isto, o que representa isto? [Como está no enunciado] Chama a Stôra.

Enquanto esperavam, o Zito ajudou outro grupo a esclarecer a noção de ordem e continuou a calcular o que era pedido a seguir; o Dinis continuava a trabalhar e a Carla tentava acompanhar o que o Dinis fazia. Este momento evidencia a autonomia destes alunos que não ficam ’paralisados’ pela dúvida, avançando no trabalho enquanto esperavam pelo meu apoio.

> **Professora**: Querem ajuda?
> **Carla:** Stôra, eu quero ajuda aqui.
> **Zito**: Nós aqui temos que dizer o que é que representa $n+2=40$?
> **Professora**: Olhem! A Carla está a pedir ajuda aqui atrás.
> **Carla**: Aqui, como é que vou explicar?
> **Zito**: Eu também não sei explicar… fogo… eu não sei explicar estas coisas.
> **Professora**: Então explica-me oralmente. O que é que tu fizeste para dar 18?
> **Zito**: Como a ordem é 20, então só tive de tirar mais 2 pontos.
> **Professora**: Porque tiras 2?
> **Zito**: Porque a ordem inversa da soma… como aqui nós somamos mais 2 e então como a ordem inversa é menos, tiramos dois.
> **Dinis**: Então, é o termo inverso.
> **Professora** [respondendo ao Zito e não me apercebendo da intervenção do Dinis]: É isso mesmo. É o que tu disseste. Como o termo é mais 2, tu para descobrires qual é, tiraste 2.
> **Zito**: Sei explicar isso oralmente mas não sei pôr no papel.
> **Professora**: Vá eu escrevo-te.
> **Dinis**: Eu escrevi isto. Então! Olha aqui! [Apontando para o que tinha escrito] É o inverso do termo geral.
> [Dado o contributo do Dinis, afasto-me]
> **Zito** [Escrevendo e simultaneamente diz num tom aparentemente aborrecido]: Porque é o inverso do termo geral. Stôra! [Chamando alto] Ainda não acabámos as nossas dúvidas, Stôra. Stôra!
> [Já com a minha presença]
> **Zito**: Stôra e aqui? Aqui neste exercício nós temos que representar alguma coisa? O que representa $n+2= 40$? É só para determinar o valor de n, certo?
> **Dinis**: 40 é o termo, certo Stôra?
> **Professora**: Acham que 40 é o termo?
> **Zito:** Então nós não sabemos a ordem.
> **Professora**: É saber a ordem …
> **Dinis**: Este é o termo geral e este é o termo [40]. E nós temos de saber a ordem.

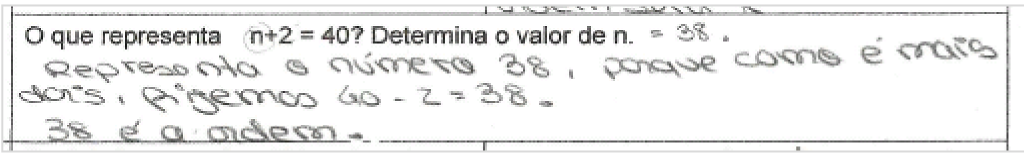
Depois deste diálogo, em que explicaram que $n+2$ é o termo geral e que 40 é o termo do qual pretendiam saber a ordem, limitaram-se a explicar como se resolvia (Figura 5.B. 7). Só depois de ouvir o diálogo entre os alunos é que me apercebi que a dificuldade do Dinis não era na determinação do valor da ordem do termo, mas no que se pretendia com “O que representa…”. O aluno não explicitou que n é 38 porque sendo 38 o resultado da operação realizada, provavelmente para ele era evidente que representava a resposta ao pedido. Recordo que este mesmo aluno, na tarefa dos *Azulejos*, depois de ter sido resolvida a equação, apresentando as várias passagens, o aluno não a transcreveu para o caderno, talvez por ainda não valorizar o registo formal.



Calcula	Explica o teu raciocínio por palavras
O primeiro termo 1+2	ordem 1+2 = 3 / Porque o n é a ordem por isso fiz o número da ordem mais 2.
A ordem cujo termo é 20	20-2=18 / é o inverso do termo geral.
O que representa n+2 = 40? Determina o valor de n. 40-2=38 / Igualmente à pergunta anterior	

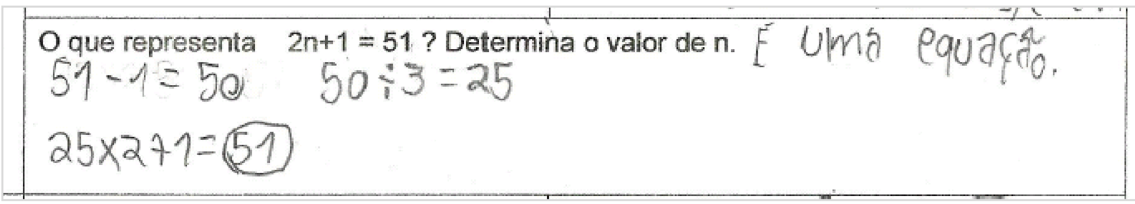
Figura 5.B. 7: Extrato da folha de registo do Dinis

Nos itens em que questionava "O que representa…." A maior parte dos grupos apenas registaram o valor de *n*. As exceções foram o grupo da Rute que escreveu que "38 é a ordem" do termo (Figura 5.B. 8) e o grupo do Damião que identificou *2n+1=51*, como uma equação (Figura 5.B. 9). Nesta resposta, uma vez mais os alunos não explicitam que *n* é 25 e neste caso, havendo vários cálculos, a identificação da resposta não era imediata. Repare-se que o aluno escreve "51:3=25" mas parece-me gralha, pois, pela verificação que realiza a seguir não há lugar a qualquer dúvida de que pensou bem.



O que representa n+2 = 40? Determina o valor de n. = 38.
Representa o número 38, porque como é mais dois, fizemos 40 - 2 = 38.
38 é a ordem.

Figura 5.B. 8: Resolução da 1.ª equação do grupo da Rute

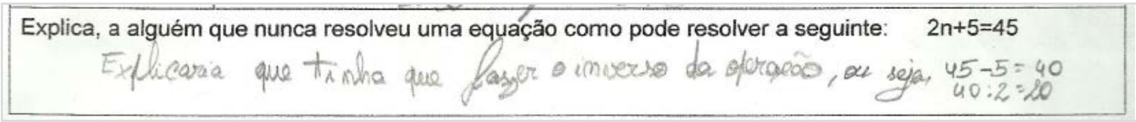


O que representa 2n+1 = 51 ? Determina o valor de n. É uma equação.
51-1=50 50÷3=25
25x2+1=51

Figura 5.B. 9: Resolução da 2.ª equação do grupo do Damião

Na última questão da tarefa era pedido que explicassem como resolver uma equação. Nesta questão, como já referi, o desempenho dos alunos ficou aquém do que eu esperava. Apresento a seguir alguns exemplos de respostas que surgiram:

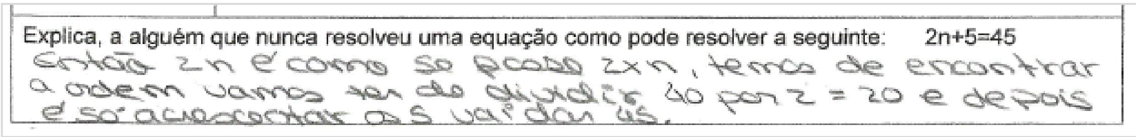
- o grupo do Dinis apoiou-se nas operações inversas (Figura 5.B. 10);


Explica, a alguém que nunca resolveu uma equação como pode resolver a seguinte: 2n+5=45

Explicava que tinha que fazer o inverso da operação, ou seja, 45-5=40
40:2=20

Figura 5.B. 10: Explicação do Dinis de como se resolve uma equação

- o grupo da Rute parece ter interpretado que *2n* tem de ser 40. Isto é, consideraram o *2n* como um valor desconhecido ao qual tinham de acrescentar 5 para obter 45 e só depois calcularam o valor de *n* (Figura 5.B. 11).


Explica, a alguém que nunca resolveu uma equação como pode resolver a seguinte: 2n+5=45

Então 2n é como se fosse 2xn, temos de encontrar a ordem vamos ter de dividir 40 por 2 = 20 e depois é só acrescentar os 5 vai dar 45.

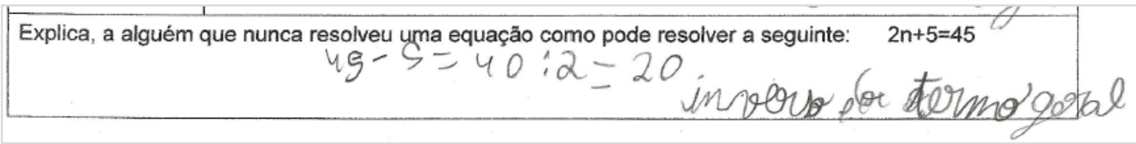
Figura 5.B. 11: Explicação da Rute de como se resolve uma equação

Um dos outros objetivos que tinha definido era desenvolver a capacidade de reflexão dos alunos. Eles revelaram conhecer o acordo didático que estabelecemos de se esforçarem por explicar os seus raciocínios. Isto é ilustrado no diálogo seguinte:

> **Zito**: O que é para explicar? Fogo… Não sei explicar isto aqui.
> (…)
> **Zito**: Como é que vou explicar? Vocês estão a explicar e eu não. (…) Eu não consigo explicar por palavras.
> **Dinis**: Então, não percebes isto?
> **Zito**: Não sei explicar por palavras.
> **Dinis**: Então como é que chegaste ao 3. Pões mais 3 e está feito?
> **Zito**: Eu sei que o primeiro termo é sempre 1. Só tenho que somar 2 com 1.

No final, quando os colegas tentavam 'despachar' a última questão com o Zito a escrever "é o inverso da operação", a Carla reclamou, ironicamente, com os colegas: "É?! Explicas a alguém que nunca fez uma equação que fizesse o inverso da operação."

Ao analisar as resoluções dos alunos constatei que o Zito também cometeu o erro de realizar os cálculos organizados horizontalmente como se pode ver na figura:


Explica, a alguém que nunca resolveu uma equação como pode resolver a seguinte: 2n+5=45

45-5=40:2=20

inverso do termo geral

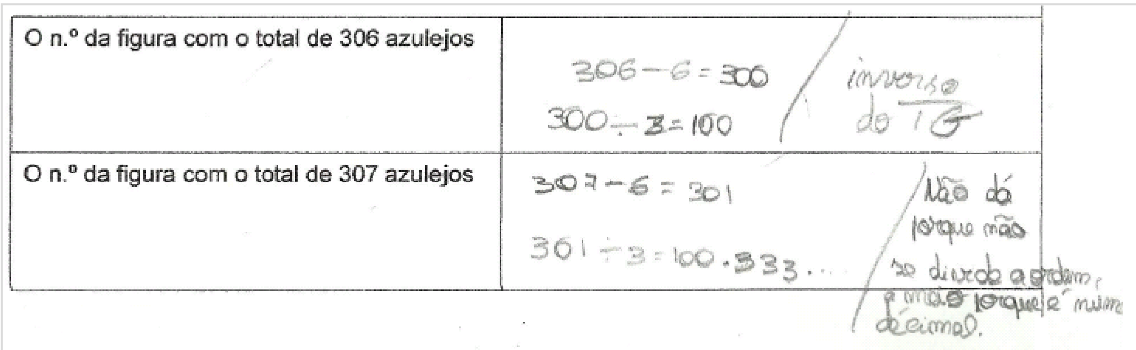
Figura 5.B. 12: Explicação do Zito de como se resolve uma equação

Interpelei-o sobre o que tinha feito pedindo que verificasse o que escreveu estando eu a tapar “40:2”. Revelando-se um pouco envergonhado o aluno deu conta de que não podia fazer tal encadeamento e confessou nunca ter percebido porque não o podia fazer.

Exploração: conexões

Na questão referente ao termo geral da tarefa dos *Azulejos*, não existe nenhuma figura com um total de 307 azulejos. Ao encandear as duas questões que podem ser lidas na figura seguinte (Figura 5.B. 13) pretendia, como referi na antecipação, verificar se os alunos se apoiavam na primeira para justificar a seguinte. Nenhum grupo associou que, se na questão anterior era possível ter uma figura com 306 azulejos, seria impossível ter uma com 307 azulejos, parecendo indiciar que resolveram mecanicamente, sem contextualizar as questões. Relembro que, por exemplo, na tarefa do *Voo em V*, na constatação que o número de pontos dos bandos das aves nunca era um número par, eles apresentaram justificações com base em respostas dadas a questões anteriores.

A título de exemplo, apresento a produção escrita do Dinis onde se verifica que ele recorreu à sua habitual estratégia de aplicar as operações inversas obtendo um número decimal. Justifica que não é possível porque “não se divide a ordem”. Através da sua produção escrita e do diálogo em que o Dinis explica à Carla porque não é termo da sequência, parece-me que o aluno sabe que a ordem é sempre um número natural.



O n.º da figura com o total de 306 azulejos	306 − 6 = 300 300 ÷ 3 = 100 inverso do TG
O n.º da figura com o total de 307 azulejos	307 − 6 = 301 301 ÷ 3 = 100.333... Não dá porque não se divide a ordem, e mais porque é num decimal.

Figura 5.B. 13: Extrato da resolução do Dinis

> **Dinis**: É que não dá para dividires a meio o número da ordem e isto é um número decimal (…)
> **Carla**: Não se divide a ordem em meio?
> **Dinis**: Não! Desde quando é que já viste uma ordem em meio? Número da figura 1,5! [Irónico] Achas que isso está correto?
> **Carla**: Não é isso! Eu não estava era a perceber o que estava aqui escrito.

Neste diálogo surge novamente a associação da ordem ao número da figura, agora com uma intenção diferente.

Síntese

A associação da ordem de um termo ao número da figura, mesmo quando não estamos na presença de uma sequência pictórica revelou-se ser uma boa 'âncora' para a compreensão da noção de ordem de um termo de uma sequência. Contudo, os alunos, com outras experiências de aprendizagem, deverão ser estimulados a se libertarem destes apoios.

Nesta tarefa, em particular com o episódio que envolveu o Paulo, verificou-se que as dificuldades residiram na terminologia usada e não nos procedimentos que tiveram de realizar. Esta tarefa não foi bem-sucedida na intenção de desenvolver a capacidade de reflexão e de comunicação escrita. Os alunos não responderam, ou por não terem percebido o que se pedia ou por ser uma parte da aula em que habitualmente revelavam pouca produtividade.

É comum identificar lacunas na explicação escrita de alunos que têm raciocínios brilhantes como é caso do Zito e do Dinis. E, aparentemente, não é por terem preguiça ou não gostarem de escrever, mas provavelmente, por não perceberem o que têm de explicar ou por não lhe reconhecerem importância. E confirmo, uma vez mais, que grande parte do que é discutido nos grupos perde-se na passagem para os registos escritos.

O trabalho inicial com as equações revelou que esta noção é intuitiva e que os alunos 'encontram' processos informais de resolução das condições mais simples. As equações foram retomadas no capítulo das *Funções*, que se seguiu, antes ainda do trabalho mais sistemático que foi feito posteriormente.

Relativamente à realização de cálculos disposto horizontalmente, há um grupo significativo de alunos a cometerem estas imprecisões que evidencia a necessidade de realizar tarefas específicas que trabalhem a noção de igualdade.

A manutenção dos grupos de trabalho, durante um conjunto de tarefas parece ser importante pois o grupo de alunos, funcionando bem, pode vir a constituir uma pequena comunidade matemática em que se vão construindo noções partilhadas e aprofundando dinâmicas de interajuda.

C. Padrão Geométrico e Função

Introduzi o conceito de função como uma correspondência unívoca entre dois conjuntos, em que a cada elemento de um conjunto associa um e um só elemento de outro conjunto. Salientei que constituía uma relação entre duas variáveis. Estabeleci desde logo, uma conexão com o tópico das sequências, pois a correspondência existente entre a ordem de um termo e o termo respetivo é uma função. Referi que nas sequências, esta correspondência é uma função particular (sucessão).

A tarefa intitulada *Padrão Geométrico e Função* foi proposta aos alunos depois de termos trabalhado o tópico das *Sequências e regularidades* e também o das *Funções*, embora este último de um modo não aprofundado. Esta tarefa foi construída por mim, a partir da descrição de um episódio de aula, incluído num livro da investigadora inglesa, Jo Boaler (2009) (Figura 5.C. 1).

Ficha de Trabalho
Prof: *Catarina Ferreira*

Conexões

Nome do Aluno: *Turma:* *Nº:* **Data:** / /

Padrão Geométrico e Função

Analisa a seguinte sequência pictórica:

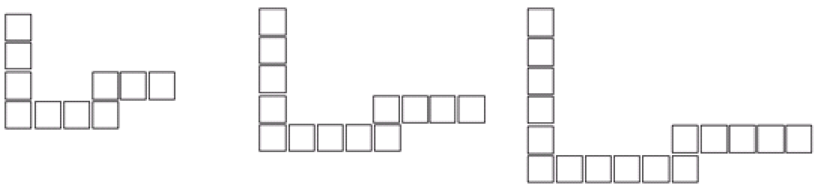


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura …

Estuda o padrão. Explica-o.

Considera a correspondência que associa o número de cada figura ao número de quadrados existente nessa figura. Esta correspondência é uma função. Explica porquê.
Representa esta função através de uma tabela, de um gráfico de uma expressão analítica, considerando no mínimo 10 figuras.
Indica o seu domínio e contradomínio.

Adaptada de *The Elephant in the Classroom: Helping Children Learn & Love Maths*, Jo Boaler, Souvenir Press, 2009.

Figura 5.C. 1: Enunciado da tarefa

A estrutura desta secção é apresentada no esquema seguinte:

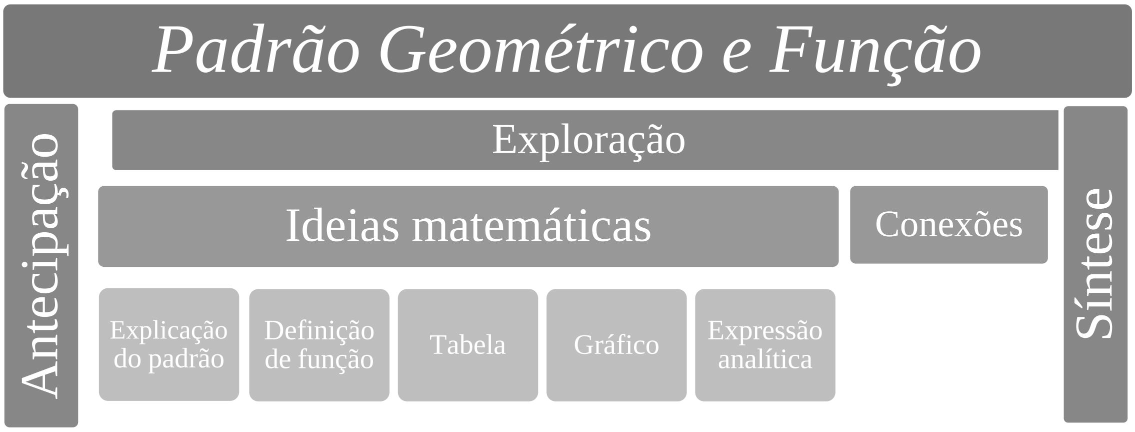


Figura 5.C. 2: Estrutura da secção

Na descrição da exploração da tarefa *Padrão Geométrico e Função* organizei as ideias matemáticas exploradas em cinco pontos: a explicação do padrão retoma aqui o lugar de destaque já tido anteriormente e surgem noções ligadas às funções – definição e diferentes representações.

Antecipação

Com esta tarefa pretendia verificar se os alunos conseguiam mobilizar os conceitos, raciocínios e representações explorados nos tópicos das *Sequências e regularidades* e das *Funções*. Questionei-me sobre a notação que os alunos utilizariam: por um lado, esperava que utilizassem a simbologia própria das funções pois tinha sido o tópico matemático trabalhado recentemente, por outro, visto a tarefa apresentar uma sequência pictórica e os alunos terem-se sentido confortáveis no tópico das *Sequências e regularidades*, considerei que seria bastante provável que preenchessem a tabela com a indicação da ordem e do termo ou ainda, de um modo informal, indicando "número da figura" e "número de quadrados".

Quando trabalhámos o tópico das *Funções*, o único contexto em que lhes pedi para indicarem a expressão analítica de uma função, tinha sido em situações de proporcionalidade direta. Na tarefa, a correspondência envolvida podia ser modulada pela restrição de uma função afim, não linear. Assim, pretendia perceber se convocariam as estratégias de raciocínio que evidenciaram na obtenção dos termos gerais das sequências para determinarem a expressão analítica.

A tarefa seria fornecida aos alunos em suporte escrito, sendo disponibilizado um exemplar por aluno, que não teriam de devolver, pois iria sugerir que utilizassem parte do enunciado na apresentação da resposta. Sugeri que apresentassem apenas uma resolução por grupo, organizada numa folha de cartolina fornecida por mim. Informei que tinham a aula para a realizar (um bloco de 90 minutos) e seria discutida numa aula posterior. Esta opção por adiar a discussão contrariou a estrutura habitual das aulas com tarefas exploratórias, em que a discussão teve início na mesma aula. Tomei esta opção pois previa que os alunos demorassem mais tempo na sua realização, devido a terem de organizar a sua resposta na cartolina, que seria para afixar num local público, na escola. Esperava que, propor um produto final com estas características despertasse, nos alunos, um maior empenho na apresentação da informação.

Previ que os alunos não tivessem dificuldades na compreensão do padrão e apoiar-se-iam nas figuras para o explicar. Provavelmente teria de incentivá-los a melhorarem as suas explicações pois também tinha como objetivo desenvolver a capacidade de comunicar, na forma escrita.

Perante situações de impasse na elaboração das diferentes representações, que pudessem vir a ser manifestadas pelos alunos, iria sugerir que elaborassem em primeiro lugar, a tabela que traduzia a correspondência descrita. Era habitual aconselhar a construção da tabela pois esta constitui uma representação muito eficaz ao apoiar a elaboração do gráfico e a determinação da expressão algébrica que representa a relação entre variáveis.

Exploração: ideias matemáticas

A exploração da tarefa só se iniciou depois do esclarecimento de dúvidas manifestadas pelos alunos na realização de exercícios que constituíam o trabalho de casa. Assim, os alunos ficaram com cerca de 60 minutos para a sua exploração.

Antes da distribuição da tarefa, dei algumas indicações: trabalhariam em grupo (houve grupos com 3,4 e 5 alunos, uma dupla e dois alunos que trabalharam individualmente); indiquei o tempo disponível para a exploração da tarefa em grupo; alertei para a necessidade de partilharem as tarefas entre os elementos do grupo e ainda referi que as cartolinas, com o trabalho dos grupos, depois de revistas por todos, seriam expostas na escola, em local a definir.

Alguns dos grupos cuja constituição se manteve, organizaram-se, quase de imediato, em volta de uma mesa. A composição dos outros grupos foi sujeita a pequenos acertos devido a dinâmicas frágeis existentes entre alunos. Um dos casos foi o Joel ter integrado o grupo de trabalho do Dinis em substituição do Damião. No grupo do Dinis, todos os alunos estavam a registar as respostas na sua folha, como aliás era o habitual. Alertei-os para a alternativa que lhes tinha dado, verificando uma vez mais, que parte das recomendações feitas na introdução ao trabalho, não são assimiladas por todos os alunos. Neste mesmo grupo, o enunciado suscitou algumas dúvidas como se percebe no diálogo seguinte:

> **Joel** [lendo]: "Estuda o padrão. Explica-o".
> **Dinis**: Espera, agora não percebi o que quer dizer. Eu sei, eu sei.
> **Joel**: O quê? … Por acaso eu também não percebi.

Eu não assisti a este diálogo e eles, mesmo manifestando alguma dificuldades, não me solicitaram ajuda, dando continuidade ao trabalho. Penso que eles não me chamaram pois um dos alunos estava confiante de que sabia. Mais tarde, quando passei pelo grupo, alertei-os de que lhes faltava a descrição do padrão e nesse momento explicaram-me oralmente, num diálogo que poderá ser lido mais adiante.

A palavra "pictórica", também suscitou estranheza em mais do que um grupo. A verdade é que já me tinham ouvido pronunciá-la, mas nunca tinha surgido por escrito. Uma das alunas, a Sara, explicou aos elementos do seu grupo que "são as figuras".

Nenhum grupo conseguiu terminar a resolução da tarefa no tempo que foi disponibilizado, que tinha sido inferior ao planificado. Contudo, ao analisar as gravações verifiquei que despenderam muito tempo em conversas paralelas exteriores ao trabalho e também dedicaram algum tempo à organização dos elementos e à escrita cuidada das explicações, confirmando-se assim o que tinha antecipado sobre os cuidados especiais com a apresentação. Neste aspeto mostraram uma atitude diferente de outras aulas: quando as resoluções foram realizadas na folha do caderno e mesmo quando as produções eram para me entregar. A título de exemplo, em aulas anteriores resistiram à utilização da régua no desenho dos eixos nos referenciais cartesianos.

No final da aula, tendo a impressão de que os grupos tinham quase todos os elementos a colocar no cartaz, faltando apenas a organização final, foi-lhes prometido que daria 10 minutos de outra aula, para completarem o trabalho. Recolhi as cartolinas para analisar o que já tinham feito e para que não ficassem esquecidas em casa ou que viessem 'maltratadas'.

Aproveitando não termos completado a tarefa numa aula, complementei o trabalho na segunda aula, com uma vertente de coavaliação pelos pares que explicarei mais à frente. Iniciei a segunda aula com algumas indicações dadas por mim: foi definido o tempo que iriam ter para terminar os cartazes (dito oralmente e escrito no quadro); teci algumas considerações sobre os trabalhos; informei que poderia passar pelos grupos de modo a chamar a atenção para alguns pormenores e expliquei o processo de coavaliação que iriam realizar ainda em grupo, do trabalho dos colegas.

Mal tinha feito referência aos trabalhos um aluno perguntou: “Stôra, qual é que está melhor?” (Paulo). Alguns alunos desta turma têm uma grande preocupação com a classificação que têm nos trabalhos sobretudo numa perspetiva de competição com os colegas. Foram informados que os trabalhos não estavam avaliados, até porque não estavam concluídos. E, para além disso, a avaliação destes trabalhos seria formativa, não havendo lugar a uma classificação. Os alunos demoraram mais tempo do que tinha previsto na conclusão dos trabalhos.

Coavaliação por parte dos alunos. Cada grupo de trabalho teve de apreciar o trabalho dos restantes grupos, registando as suas observações no documento que apresenta a seguir (Figura 5.C. 3). Esta coavaliação tinha como principal objetivo desenvolver a capacidade de comunicação dos alunos e permitiria trazer elementos para a avaliação reguladora das suas aprendizagens, fornecidos pelos colegas e por mim. Este instrumento veio a revelar-se uma ferramenta poderosa na minha reflexão sobre os trabalhos: cruzando as informações, permitiu esclarecer alguns pontos.

Ficha de Trabalho - **Padrão Geométrico e Função**
Coavaliação dos Trabalhos dos Grupos **Data:** / /
Grupo A

Analisa o trabalho dos teus colegas. Indica:

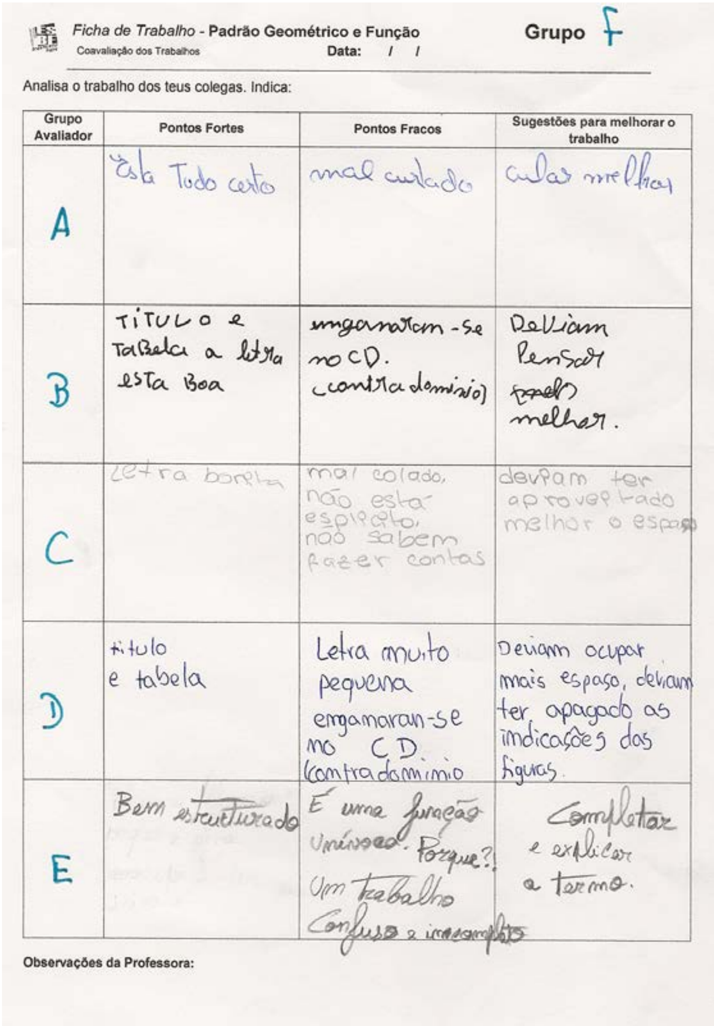
Grupo Avaliador	Pontos Fortes	Pontos Fracos	Sugestões para melhorar o trabalho
B			
C			
D			
E			
F			

Observações da Professora:

Figura 5.C. 3: Ficha de apoio à coavaliação dos trabalhos

As cartolinas com os trabalhos dos grupos, acompanhadas por um exemplar deste documento, circularam entre os grupos. A sequência foi aleatória, dependendo do ritmo de preenchimento de cada grupo que durou cerca de 20 minutos. A partir da passagem pelo primeiro grupo avaliador, os alunos tiveram acesso aos comentários que os colegas do (s) grupo (s) anterior (es) escreveram. Este aspeto foi ponderado por mim: alguns alunos podiam limitar-se a copiar os comentários uns dos outros mas, conhecendo a turma, intuí que a generalidade não o faria pois são muito ciosos da sua opinião. Isto foi parcialmente confirmado pois em todas as fichas de coavaliação apareceram comentários distintos. Alguns alunos foram bastante assertivos nas observações que fizeram do trabalho dos colegas dando maior atenção a aspetos que se prendiam com a forma. Alguns grupos detetaram e assinalaram as incorreções nas respostas dos colegas.

Ao lado apresento um exemplo ilustrativo (Figura 5.C. 4). Neste exemplo verifica-se que vários grupos tecem apreciações relativas a aspetos da forma. Por exemplo: "letra bonita", "mal colado", "mal cortado" (com erro ortográfico) e "deviam ter aproveitado melhor o espaço". Há observações relativas a erros a nível de conceitos – "enganaram-se no CD" – e outras chamando a atenção para explicações incompletas – "É uma função unívoca. Porquê?".


Ficha de Trabalho - Padrão Geométrico e Função
Coavaliação dos Trabalhos
Data: / /
Grupo F

Analisa o trabalho dos teus colegas. Indica:

Grupo Avaliador	Pontos Fortes	Pontos Fracos	Sugestões para melhorar o trabalho
A	Esta Todo certo	mal cortado	colas melhor
B	TíTULO e TaBela a letra esTa Boa	enganaram-se no CD. (contradomínio)	Deviam Pensar ~~pa~~ melhor.
C	Letra bonita	mal colado, não esta espeito, não sabem fazer contas	deviam ter aproveitado melhor o espaço
D	titulo e tabela	Letra muito pequena enganaram-se no CD (contradominio	Deviam ocupar mais espaço, deviam ter apagado as indicações das figuras.
E	Bem estruturado	É uma função Unívoca. Porquê? Um trabalho Confuso e incompleto	Completar e explicar a termo.

Observações da Professora:

Figura 5.C. 4: Coavaliação do grupo da Sara, realizada pelos restantes colegas

Num dos grupos, ao analisar o trabalho dos colegas, acharam que a sua resolução tinha incorreções. Os alunos levantaram-se e procuraram o seu cartaz de modo a confirmá-lo. Não questionaram se seria a resolução dos colegas a estar errada e chamaram-me para pedir que lhes devolvesse o seu trabalho de modo a poderem corrigi-lo. Eu, que tinha analisado a resolução deles em casa e sabia estar correta, lancei a possibilidade de a resolução incorreta não ser a deles. Constatei que o fato de não termos concluído o trabalho com esta tarefa numa só aula, poderá ter contribuído para que não tivessem tão presente o que tinham realizado. Na parte final da aula, recolhi todo o trabalho realizado e os alunos envolveram-se noutra tarefa. A discussão seria realizada depois de analisar todas as produções.

Em casa, voltei a analisar os cartazes e escrevi as minhas observações na folha referente à coavaliação, no espaço previsto para tal. Numa aula posterior, sentei-me com cada grupo de trabalho (enquanto os restantes grupos trabalhavam noutra tarefa) discutindo as fraquezas de cada trabalho. Os elementos de cada grupo, após esta pequena discussão, fizeram as alterações que consideraram pertinentes, partindo do retorno que lhes dei e também das observações dos colegas. Houve ainda lugar à discussão coletiva com apoio de *slides*[20], preparados por mim, em que surgia a sequência pictórica e a tabela já preenchida (Anexo 5).

Explicação do padrão

Os alunos mostraram facilidade na compreensão do padrão mas não valorizaram o pedido para o explicar. Quando solicitei que o fizessem, revelaram uma vez mais, algumas dificuldades na redação escrita. Esta dificuldade pareceu acentuar-se por estarem envolvidos elementos geométricos. Na resposta apresentada na figura seguinte (Figura 5.C. 5) as alunas escrevem que "o padrão vai de três em três", referindo-se ao número total de quadrados que aumenta de figura para figura, não concretizando de modo inequívoco, a localização dos quadrados acrescentados em cada figura.

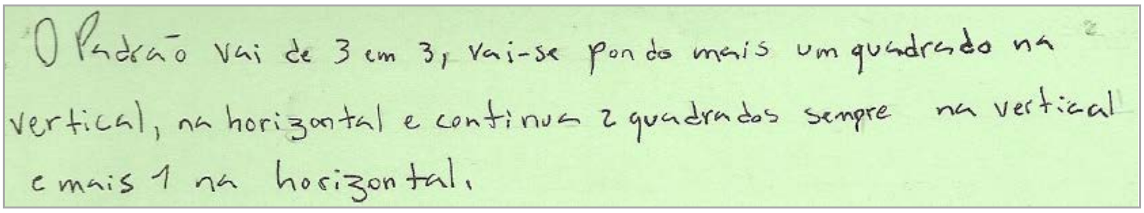

O Padrão vai de 3 em 3, vai-se pondo mais um quadrado na vertical, na horizontal e continua 2 quadrados sempre na vertical e mais 1 na horizontal.

Figura 5.C. 5: Extrato da explicação do padrão de Maria e Ilda

[20] Nesta altura as aulas já decorriam no novo espaço físico com meios tecnológicos ao dispor

Ao considerar que o que as alunas escreveram estava pouco claro, pedi que apoiassem a sua explicação nas figuras. Na figura seguinte (Figura 5.C. 6), percebe-se que ‘riscaram’ o referente a “continua 2 quadrados sempre na vertical”, não explicitando onde se acrescentava “mais um quadrado na horizontal”.

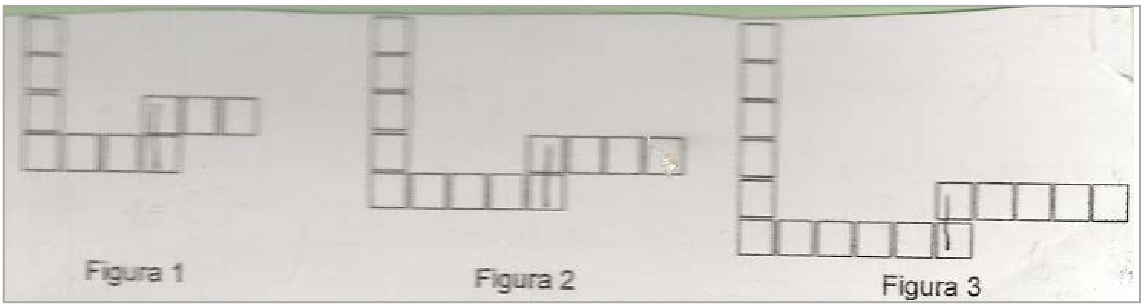


Figura 5.C. 6: Figura de suporte à explicação do grupo da Maria e Ilda

No grupo da Sara também houve alguma dificuldade na descrição do padrão. O diálogo que apresento a seguir dá ideia de como se desenvolveu a conversa entre alguns dos elementos do grupo:

> **Bruno**: Temos de explicar, então - cresce mais um aqui, cresce um aqui, cresce um aqui.
> **Sara:** Vai-se sempre acrescentando aqui nos lados.
> **António**: Cresce um aqui…Parece que estás a falar chinês.
> **(…)**
> **Rodolfo:** É sempre mais 3.
> **Sara**: Se cresce sempre mais 3, então é *n3*.
> **Rute** [a escrever]: Cresce sempre mais três.

Quando os questionei sobre a explicação do padrão, disseram-se que “acrescenta-se sempre mais três”. Não satisfeita com a explicação, perguntei-lhes onde se acrescenta os três quadrados e sugeri que evidenciassem na figura o que me estavam a explicar. Assim, deixaram em branco os quadrados que consideraram ser ‘a base’ ou ‘ponto de partida’ na constituição de cada termo da sequência e sombrearam os quadrados que se acrescentam, relativamente ao anterior, como se pode ver na figura seguinte (Figura 5.C 7). No diálogo, repare-se na segunda intervenção da Sara: a aluna generaliza que se “cresce sempre mais três” no termo geral terá de aparecer “n3”. Será que quando se debruçarem sobre a expressão analítica irão ter isso em conta?

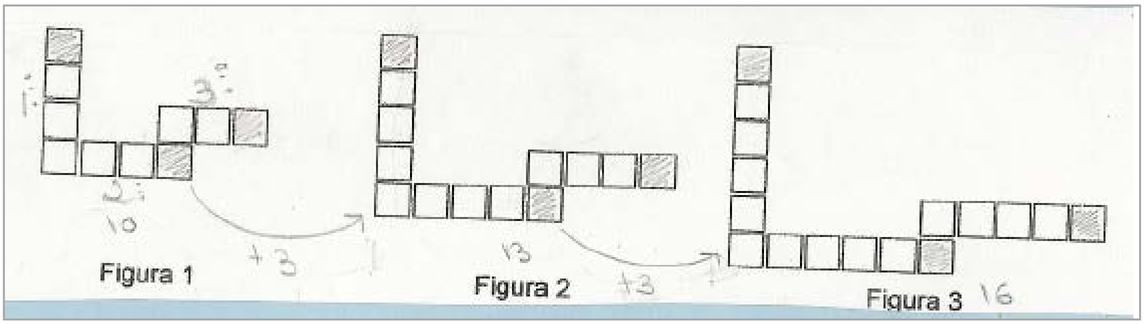


Figura 5.C. 7: Figura de suporte à explicação do grupo da Sara

O terem sombreado os quadrados parece ter ajudado na explicação escrita (Figura 5.C. 8). Contudo, não fizeram distinção entre linhas e colunas pois referem-se a tudo como colunas. A vantagem da distinção entre linhas e colunas será defendida na síntese final desta secção.

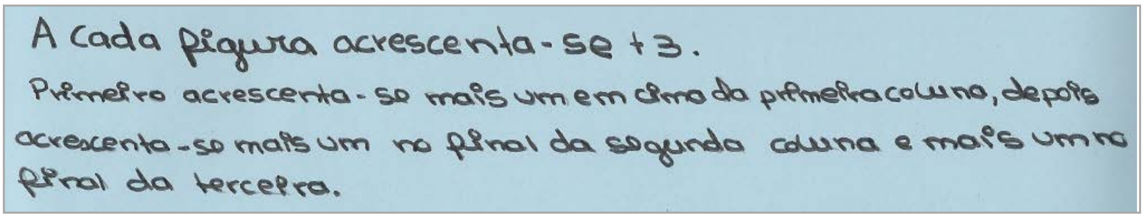

A cada figura acrescenta-se +3.
Primeiro acrescenta-se mais um em cima da primeira coluna, depois acrescenta-se mais um no final da segunda coluna e mais um no final da terceira.

Figura 5.C. 8: Explicação apresentada pelo grupo da Sara

No grupo do Damião, os alunos limitaram-se a dizer que se acrescenta 3 quadrados de figura para figura, não fazendo qualquer referência ao padrão figurativo (Figura 5.C. 9).

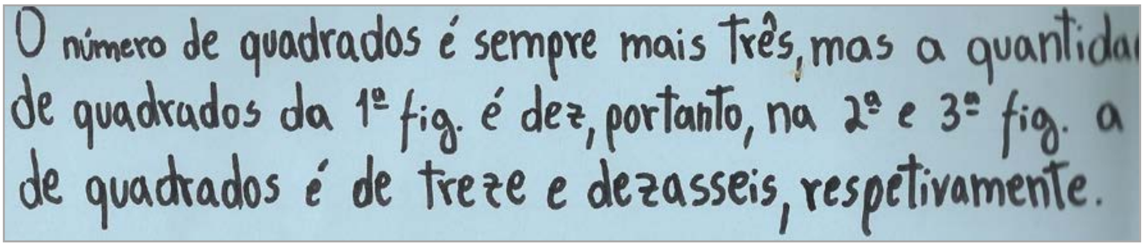

O número de quadrados é sempre mais três, mas a quantida
de quadrados da 1ª fig. é dez, portanto, na 2ª e 3ª fig. a
de quadrados é de treze e dezasseis, respetivamente.

Figura 5.C. 9: Explicação apresentada pelo grupo do Damião

O grupo do Damião desvalorizou a sequência pictórica, raciocinando apenas sobre a sequência numérica. Esta desvalorização é confirmada quando, na coavaliação da resolução da Sara (Figura 5.C. 4) escreveram nas *Sugestões para melhorar*, o que se pode ler na Figura 5.C. 10. Não compreenderam que as "indicações" pretendiam ser um contributo para ajudar na interpretação da explicação escrita.

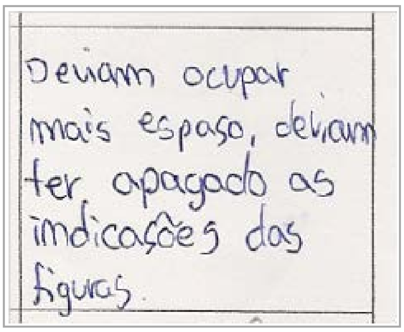

Deviam ocupar
mais espaso, deviam
ter apagado as
indicações das
figuras.

Figura 5.C. 10: Extrato da coavaliação do grupo do Damião ao grupo da Sara

Analisando a produção escrita do Dinis (Figura 5.C. 11) identifico novamente, dificuldades na explicação escrita: “ [de figura para figura] vai-se acrescentando sempre mais 3 quadrados”.

Os alunos referem que “O padrão começa no 10” mas efetivamente, o que começa no 10 é a sequência numérica referente ao número total de quadrados de cada figura. Saliento o pormenor de terem identificado como se inicia a sequência numérica, pois tinha sido um aspeto que tinham descurado aquando da discussão das leis de formação de sequências numéricas e que parece ter sido apropriado, com sucesso, por este grupo.

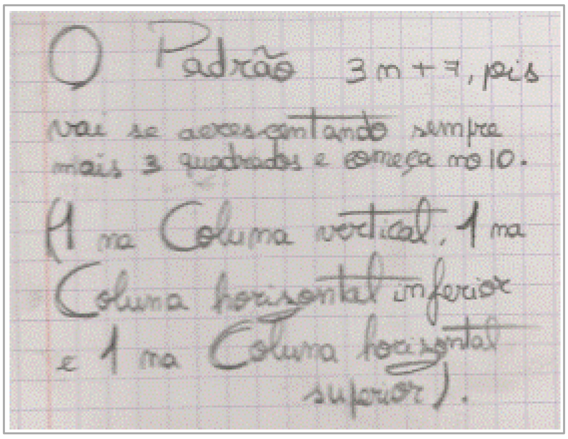


Figura 5.C. 11: Explicação do grupo do Dinis

O grupo do Dinis tinha manifestado dificuldades na compreensão do pedido na tarefa sobre a “explicação do padrão”. Quando os confrontei com a falta dessa descrição, desenrolou-se um diálogo onde me apercebi que eles consideraram que a indicação do termo geral da sequência do total de quadrados de cada figura constituía a explicação do padrão, não havendo lugar à explicação em linguagem natural. Mais uma vez[21] quando lhes é pedido a explicação da lei de formação ou a descrição do padrão, estes alunos apresentam uma expressão algébrica. Isto poderá prender-se com o não reconhecer a relevância da descrição em linguagem natural ou por não saberem que era isso que se pretendia. Assim:

> **Professora**: Já explicaram o padrão?
> **Joel**: É a expressão analítica, certo? É 3n.
> **Dinis**: Não! É de 3 em 3, certo?
> **Professora**: Mas já explicaram? “Estuda o padrão. Explica-o” [lendo].
> **Dinis**: Acrescenta-se sempre um em cima, um em baixo.
> **Professora**: Têm de explicar isso.
> **Joel**: Fazemos n+3.
> **Zito**: É 3n.
> **Professora**: Uma coisa é o termo geral, outra coisa é explicar o padrão.
> **Joel**: É n+3… Espera, n+3, não!
> **Zito**: n é a ordem, certo?
> **Professora**: Confirmem se o termo geral está certo. Se começa no sítio certo.

[21] Já tinha acontecido na tarefa do *Voo em V*

Três minutos depois, volto ao grupo com a intenção de os ajudar a organizar as tarefas que ainda tinham por realizar. Sugeri a um dos alunos que fosse ele a registar a explicação do padrão e é então que percebo que eles não ficaram completamente esclarecidos:

> **Professora**: Porque é que não vais tu explicando o padrão? [dirigindo-me ao Zito]
> **Zito**: O padrão é 3n.
> **Professora**: Oh Zito! E grupo! Parem lá todos um minuto, se faz favor.
> **Joel**: Sim, professora.
> **Professora**: Vamos lá perceber aqui uma coisa: não sei se vocês já leram bem o enunciado. A primeira coisa que diz é "Estuda o padrão. Explica-o" [acentuando "explica-o"].
> **Zito**: Depois vai saltando 3 em 3. Cada vez mais 3 quadrados.
> **Professora**: Está bem, mas onde crescem esses três?
> **Joel**: O padrão é acrescentando 3 em cada figura.
> **Zito**: É na base.
> **Professora**: E onde acrescenta 3? É em qualquer sítio da figura?
> **Joel**: Não.
> **Professora**: A figura cresce em linha reta?
> **Zito**: Qual é o nome desta linha?
> **Professora**: Isso chama-se uma coluna.
> **Zito**: Um na coluna vertical, outro na coluna horizontal, outro...
> **Joel**: Espera aí: há duas colunas.
> **Professora**: Têm de explicar isso. Estavas a responder-me o termo geral.

Mais tarde, quando estão a registar, retomam este assunto:

> **Joel**: Explica o padrão, Zito!
> **Zito**: O padrão é… de 3... Ah!
> **Joel**: Olha Zito, há duas linhas horizontais e uma linha…
> **Zito** [interrompendo o colega]: Chamamos a esta linha, horizontal superior e horizontal inferior. O que é que achas?
> **Joel**: Como assim? Há 3 linhas, não é? Há duas verticais. Não, espera, uma vertical e duas horizontais. Então faz assim, acrescentas um quadradinho…
> **Zito**: Acrescentamos um quadradinho à coluna horizontal inferior e acrescentamos um quadradinho à coluna horizontal superior.

Durante o diálogo anterior os alunos vão falando de linhas e colunas, referindo-se ao conjunto de quadrados organizados, quer na horizontal, quer na vertical, respetivamente. Contudo, na explicação escrita que apresentam (Figura 5.C. 11) usam apenas o termo "coluna". Posteriormente, na discussão que fiz do trabalho com este grupo, os alunos reafirmaram que a explicação que apresentam será inteligível para qualquer pessoa, mesmo que tenha acabado de tomar contato com a sequência.

Analisando este episódio sinto que deveria ter pedido aos alunos para me explicarem o que era pedido na tarefa – ao solicitar que explicasse por palavras suas poderia ter contribuído para que se apropriassem melhor do que era pretendido no enunciado.

Definição de função

Relativamente à justificação de que a correspondência era uma função, um dos grupos interpelou-me: “Stôra, nós não conseguimos explicar porque é que é uma função”. Depois de os questionar, percebi que as dificuldades residiam na definição de função. A verdade é que esta noção não foi muito explorada no início do tópico das funções, tendo optado por ir aprofundando à medida que fossemos explorando várias correspondências. Os elementos do grupo do Damião, depois de consultarem o caderno e o livro, justificaram assim:

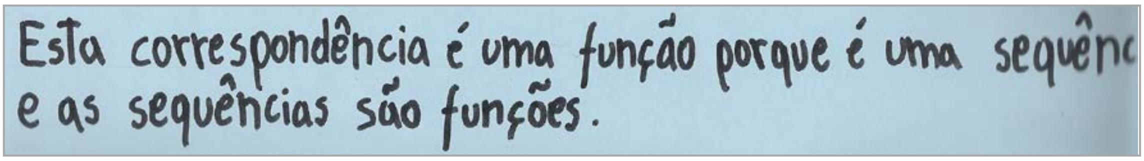

Esta correspondência é uma função porque é uma sequênc
e as sequências são funções.

Figura 5.C. 12: Justificação do grupo do Damião

Esta justificação surgiu num contexto em que as noções foram trabalhadas de um modo integrado. Faltou, todavia, que explicitassem que estavam a considerar a correspondência entre o número da figura e o número de quadrados dessa mesma figura.

O grupo da Sara refere apenas que é uma “correspondência unívoca” não explicando mais nada. Esta ausência de justificação foi notada pelo grupo do Dinis que a registou na coavaliação que realizou deste trabalho (ver Figura 5.C. 14 e Figura 5.C. 13, respetivamente).


É uma função porque é uma correspondência unívoca

Figura 5.C. 13: Justificação do grupo da Sara

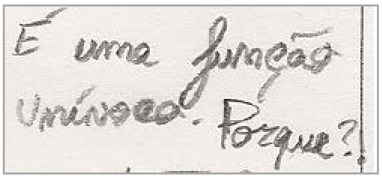


Figura 5.C. 14: Coavaliação do grupo do Dinis à resolução do grupo da Sara

A justificação de que uma correspondência é uma função levanta habitualmente dificuldades nos alunos. Apercebo-me que alguns refugiam-se numa resposta estandardizada, talvez por não entenderem bem o conceito de função. A dificuldade é maior no reconhecimento da unicidade da correspondência.

Como muitas vezes acontece, surgiu a confusão entre a noção de função e a noção de função injetiva (não é trabalhada neste ciclo de escolaridade). A justificação apresentada pelo grupo do Dinis, que pode ler-se na figura ao lado (Figura 5.C. 15), ilustra este tipo de confusão.

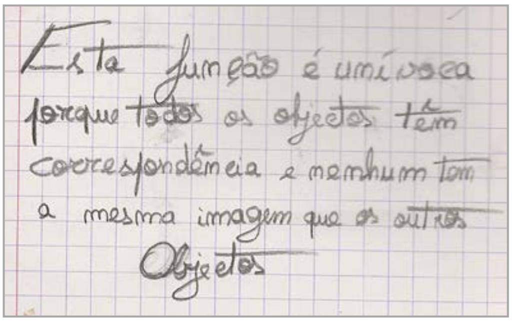


Figura 5.C. 15: Justificação do grupo do Dinis

No diálogo seguinte podemos entender como esta justificação foi construída por vários elementos do grupo do Dinis:

> **Professora**: Leiam novamente a tarefa e vejam se não vos falta nada. (…) Zito, já por várias vezes, tens dito que não a coisas que eu refiro e depois damos conta que falta qualquer coisa. Por exemplo, já viram se esta correspondência é uma função? Já provaram isso? [afasto-me do grupo].
> **Joel**: Sim, porque cada correspondente tem apenas uma imagem.
> **Dinis** [sobrepondo-se ao Joel]: Sim, é uma função porque todas as imagens têm uma correspondência.
> **Zito**: É uma função unívoca pois… nenhum objeto tem…cada…
> **Dinis** [sobrepondo-se ao Zito]: Todos os objetos têm correspondência a imagens.
> **Zito** [completando o Dinis]: Todos têm correspondência e nenhum tem a mesma. Nenhum tem a mesma correspondência.

Mais tarde, os alunos retomaram esta discussão, quando registavam na cartolina:

> **Dinis**: O que é que é para pôr mais?
> **Zito**: Aquela coisa da função que eu disse: esta função é unívoca porque nenhum objeto tem a mesma correspondência que o outro.
> **Dinis** [que está a escrever]: Esta função é uma função…
> **Zito**: Joel tira o *vo* de unívoca… O que é que fica?
> **Dinis**: Não digas em voz alta [irónico].
> **Joel**: Espera: de unívoca tira o *vo?*
> **Zito:** Fica única.

> **Dinis**: Todos os objetos…
> **Zito** [completando]: …não têm a mesma correspondência que os outros… nenhum objeto tem a mesma correspondência que o outro … uma igualdade a outro.
> **Dinis**: Todos os objetos têm.
> **Zito**: Nenhuma é igual a outra.

Deste diálogo percebe-se que a construção da justificação é partilhada por dois alunos, revelando o Zito a confusão entre o conceito de função e o de função injetiva. Este aluno, ao debruçar-se sobre a palavra "unívoca", constata que se retirar uma sílaba obtém a palavra "única". Contudo, em vez de associar o "única" ao fato de cada objeto ter apenas uma imagem associa a que cada correspondente seja imagem apenas de um objeto.

Os alunos que manifestaram algum conhecimento sobre domínio e contradomínio não fizeram confusão entre os dois conceitos. No diálogo seguinte podem ser identificadas associações que foram sendo discutidas ao longo das aulas e que os alunos mobilizaram, na realização desta tarefa:

> **Carla**: O que é o domínio e o contradomínio?
> **Joel**: Domínio é o x, contradomínio é o….
> **Dinis**: Domínio é o x, y é contradomínio.
> **Zito**: Domínio é o número da figura.

Apesar destas associações serem imprecisas do ponto de vista formal, podem funcionar como 'âncoras', para os alunos, podendo contribuir para a construção do significado dos conceitos.

Tabela

Os grupos de trabalho utilizam, nas suas tabelas, diferentes designações para representar as variáveis. A seguir são apresentados alguns exemplos.

<u>Exemplo 1 – Grupo da Sara</u>

Inicialmente o grupo questionou-me se poderiam utilizar as letras A e B, para designar as variáveis na tabela. Respondi-lhes: "Vocês podem fazer como entenderem?". Sem a minha presença refere a Sara: "Bruno, porque é que aqui não pode ser *F* e *O*, de ordem? A aluna, aparentemente, quereria representar por *F* o número de quadrados de cada figura, pois quando elaboram a tabela não cometeram nenhum erro (Figura 5. C. 16). Ao analisar a tabela observo que associaram a letra x à ordem de um termo e y aos termos da sequência, revelando uma associação entre as noções e terminologias estudadas nos dois tópicos matemáticos – *Sequências e regularidades* e *Funções* (os valores dos termos a partir da ordem 4 estão incorretos).

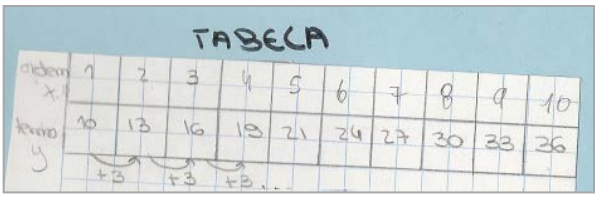


Figura 5.C. 16: Tabela elaborada pelo grupo da Sara

<u>Exemplo 2- Grupo da Maria</u>

Houve um grupo que escolheu letras que não têm aparente associação à tarefa. Depois de questionadas, as alunas esclareceram que não houve razão especial para estas escolhas (são alunas com necessidades educativas especiais).

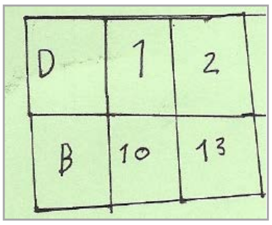


Figura 5.C. 17: Parte da tabela elaborada pelo grupo da Maria

Sensibilizei as alunas de que, embora tenham liberdade de escolha, em certos casos poderá ser relevante a escolha de designações que, de algum modo, estejam relacionadas com a tarefa em causa, pois poderá facilitar na identificação rápida do que está envolvido. Após a discussão dos trabalhos decidiram alterá-las.

<u>Exemplo 3 – Manuel</u>

O aluno optou por não usar letras para representar as variáveis em estudo. Utilizou designações em linguagem natural (Figura 5.C. 18). De referir que, no gráfico que construiu, não indicou a legenda dos eixos. Este aluno revela necessitar de um acompanhamento no desenvolvimento da sua capacidade de formalização.

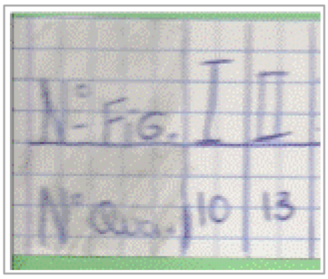


Figura 5.C. 18: Parte da tabela elaborada pelo Manuel

<u>Exemplo 4 – Grupo do Dinis</u>

A construção da tabela associada a esta correspondência era algo que pensei não levantar dúvidas. Porém, a Carla exteriorizou que desconhecia o que deveria surgir na segunda linha da tabela. Não tinha compreendido qual a correspondência em causa e é o Dinis que, uma vez mais, lhe explica, como se confirma no diálogo que apresento a seguir. Nesse diálogo pode verificar-se que os alunos decidiram designar as variáveis por *"Figura"* e *"N. Quadrados"* (número de quadrados). Ainda na análise do diálogo identifiquei alguma hesitação na escolha da variável que será representada em cada eixo, que é ultrapassada pelos alunos, autonomamente, através da conexão que estabeleceram com a tabela. No gráfico que se pode ver mais à frente (Figura 5.C. 19), verifico que os alunos indiciam alguma formalização pois designam a variável representada no eixo das abcissas por "F".

> **Dinis**: Então olhem, vamos começar com a tabela. Ok, temos aqui a figura … certo? Representamos por F.
> **Joel**: Se quiseres eu vou construindo o gráfico.
> **Zito**: Cada figura acrescenta-se 3 quadrados.
> **Dinis**: Ok! Figura e número de quadrados, certo?
> **Zito**: Figura 1, número de quadrados é... Vamos lá contar: 6+4 é 10, não é?
> **Joel**: Para a tabela tens que fazer no mínimo, 10 figuras.
> **Carla**: Aqui mete-se a figura em cima e então em baixo?
> **Dinis**: O quê? No mínimo 10 figuras?! Estás a gozar comigo?
> **Carla**: Estás ouvir? Olha lá, espera aí! Então e aqui?
> **Zito** [respondendo à Carla]: Acho que é o número de quadrados.
> **Joel**: Estou a fazer o gráfico, oh!
> **Zito** [reforça]: A [figura] número 1 tem 10 quadrados. A [figura] número um.
> **Joel**: A [figura] número 2 tem 13 quadrados e a [figura] número…
> **Carla** [referindo-se à tabela]: Então em baixo é o número de quadrados?
> **Dinis**: É.
> **Joel** [referindo-se ao eixo horizontal do referencial]: Ai é?! Não é o número da figura? Eu acho que em baixo é o número da figura.
> **Dinis**: Eu estou a dizer na tabela.
> **Joel**: Espera!
> **Dinis**: Então olha lá, isto aqui na tabela não é o x e y?
> **Joel**: É
> **Dinis**: Então, se aqui é x, aqui é os números.

As variáveis que devem ser representadas em cada um dos eixos do referencial cartesiano é uma dificuldade que os alunos costumam manifestar. Numa tentativa de os apoiar tinha registado anteriormente uma nota, que estabelecia a correspondência entre a posição das variáveis na tabela e sua representação nos eixos do referencial cartesiano onde se pretende apresentar o gráfico da função. Parece-me ter sido essa nota que o Dinis consultou, ou em que se baseou, para esclarecer o Joel. O trabalho desenvolvido na elaboração do gráfico é descrito a seguir.

Gráfico

Na discussão com os grupos questionei os alunos sobre o que para eles é um gráfico de uma função. Revelaram muitas hesitações e pouca segurança sendo precisas perguntas mais diretas para conseguir que dissessem algo. Apresento um extrato do diálogo:

> **Professora**: O que é para vocês, um gráfico? Quando vos peço para fazerem um gráfico, o que é para vocês, um gráfico? [Perante silêncios acrescento] Digam coisas soltas, sem problemas de…
> **Bruno**: É para analisar uma coisa. É para comparar com as outras.
> **Professora**: O que é que o gráfico compara?
> **Bruno**: Compara este com este [apontando para os dois eixos].
> **Professora**: Relaciona, ok.
> **Professora**: Vou fazer perguntas mais concretas. O gráfico podia não ter estes pontos?
> **Bruno**: Não. Podia não ter as linhas.
> **Professora**: Podia não ter as linhas auxiliares.
> **Bruno**: É para nos ajudar a situar os pontos. As linhas ajudam.

Muitos alunos persistiram em erros na definição da escala dos eixos do referencial cartesiano. Não entendem porque o primeiro valor não pode ser o menor que têm de marcar e depois seguir uma outra medida. Isto é, consideram ser indiferente não manter a unidade escolhida para o primeiro intervalo de valores. Frequentemente tentam defender-se com questões como "os valores estão lá, não estão?".

Este erro surge no trabalho do grupo do Dinis (Figura 5.C. 19) e como se pode comprovar no diálogo seguinte, a decisão do primeiro valor a constar do eixo das ordenadas foi partilhada por dois alunos mas o restante não foi discutido. Perguntava o Joel [enquanto desenhava o gráfico]: "É preciso ir até ao 37, não é, Dinis?":

> **Dinis**: Iá, mas podes começar tipo no 10, ou assim.
> **Joel**: Sim, estava a pensar começar no 10.

Saliento, uma vez mais, que designaram por "F" – número da figura e não identificaram a variável representada no eixo das ordenadas. Recordo que, na tabela, definiram as variáveis por *"Figura"* e *"N. Quadrados"*.

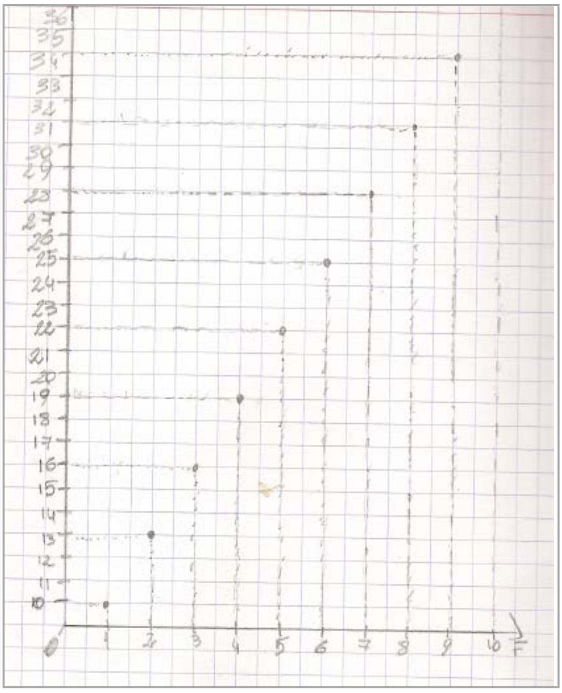


Figura 5.C. 19: Gráfico do grupo do Dinis

Outro argumento que os alunos apresentam é a da falta de espaço na folha, para indicarem todos os valores que necessitam. Na discussão que fiz com o grupo do Dinis, ao questioná-los sobre a escala do eixo das ordenadas, desenrolou-se o seguinte diálogo em que se percebe uma referência a este aspeto da 'falta de espaço' e ainda a dificuldades em marcar valores intermédios. Aparentemente, o Dinis conhecia os cuidados a ter na definição da escala dos eixos, mas não lhes deu atenção quando foi condicionado pelo espaço. Assim:

> **Zito**: É sempre de 3 em 3.
> **Professora**: É sempre de 3 em 3. Mas quanto representa esta quadrícula aqui? [aponto para a primeira marcação do eixo das ordenadas].
> **Alunos**: 10.
> **Professora**: 10. E esta aqui?
> **Dinis:** 1, mas isso tinha que começar no 10 senão não cabia na folha.
> **Professora**: Então, no mesmo eixo, posso ter uma quadrícula a valer 10 e outra a valer 1.
> **Dinis**: Não.
> **Joel**: Então como é que púnhamos, professora?
> **Professora**: Têm de ser vocês a adaptar a escala.
> **Joel**: Isto de 10 em 10… Ocupava a cartolina toda, se calhar.
> **Zito**: De fosse de 3 em 3…
> **Joel**: Zito olha o tamanho disto: isto foi 10 e 1. Se fosse de 3 em 3 não ia caber.
> **Zito** / **Dinis**: Cabia. Ainda cabia melhor
> **Joel**: Cabia?
> **Zito**: De 3 em 3 são os números que vão de 3 em 3.
> **Dinis**: Aqui pus de 1 em 1, por isso…
> **Professora**: Uma quadrícula valer 3, é o que tu queres dizer?
> **Joel**: Depois não apanhavas o 10, nem o 13.
> **Zito**: Tipo, começávamos no 1 e depois assim tínhamos mais espaço. 1, 3 e por aí fora.
> **Dinis**: Vê lá se começas no zero. Certo, Stôra?
> **Professora**: Sim, o eixo tem de começar no zero.
> **Dinis**: Depois fazes logo o 3, 6, 9…
> **Professora**: Depois como marcavam o 10, como está a dizer o Joel?
> **Joel**: Estão a baralhar-me todo
> **Professora**: Vocês têm de tomar decisões em relação a este eixo….

Na sequência desta discussão, os alunos construíram um novo gráfico que foi colado, na cartolina, sobre o anterior.

Um aspeto que durante as aulas identifiquei e para o qual fui alertando os alunos, prende-se com o traçar do gráfico da função. Há alunos que desenham as linhas auxiliares à marcação dos pontos mas não os assinalam. Este erro persistiu num dos alunos, o Manuel (Figura 5.C. 20).

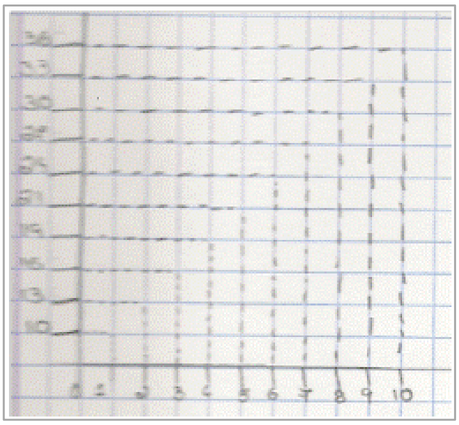


Figura 5.C. 20: Gráfico construído pelo Manuel

Expliquei também que as linhas auxiliares a tracejado, são desnecessárias quando, por exemplo, se usa papel quadriculado e o próprio traçado da quadrícula apoia na identificação dos valores das coordenadas a que correspondem os pontos do gráfico que pretendem marcar. No gráfico construído pelo grupo da Bruna (Figura 5.C. 21), verifico que tomaram essa opção. Contudo, alguns alunos revelaram uma ideia errónea, que aliás é muito frequente, de que as tais linhas tracejadas são parte integrante do gráfico da função. Não as reconhecem apenas como auxiliares de leitura dos valores. Isto é confirmado pela crítica realizada pelo grupo do Damião (Figura 5.C. 22) ao gráfico elaborado pelo grupo da Bruna (Figura 5.C. 21).

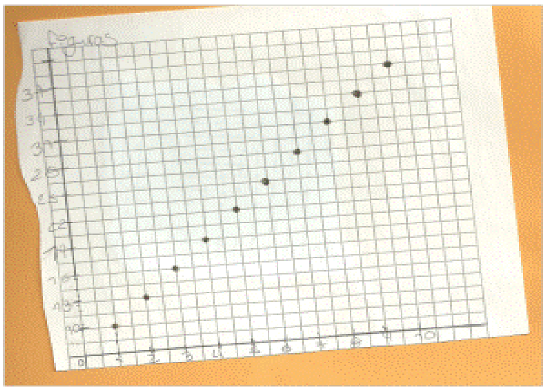


Figura 5.C. 21: Gráfico elaborado pelo grupo da Bruna

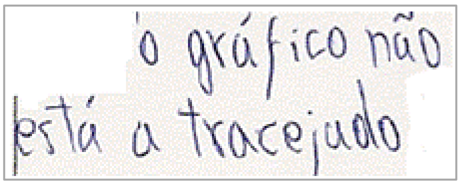


Figura 5.C. 22: Coavaliação do grupo do Damião ao trabalho do grupo da Bruna

A discussão de quando se pode ou não ligar os pontos do gráfico, isto é, perceber se estão perante uma variável independente discreta ou contínua, parece ter sido interiorizada pelos alunos pois nenhum grupo ligou os pontos do gráfico. E o gráfico desta função até era bastante tentador, pois os pontos são colineares.

Expressão analítica

Apenas três dos seis grupos fizeram uma tentativa de apresentação de uma expressão analítica da função. O grupo da Sara, no final da primeira aula tinha indicado f(x)=3x. Esta aluna tinha feito a observação do "n3", aquando da explicação do padrão. Quando alertados por mim de que haveria uma 'pequena incorreção' na expressão analítica, alteraram-na e escreveram "f(x)=y-x" (ver Figura 5.C. 23). A observação que fiz parece ter despoletado alguma confusão pois os alunos

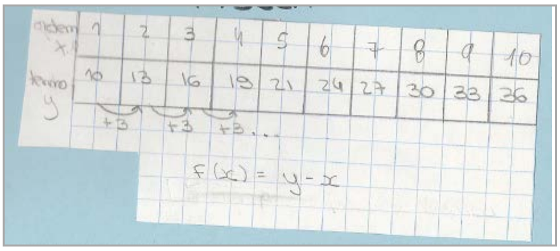


Figura 5.C. 23: Tabela e expressão analítica do grupo da Sara

alteraram a expressão de “3x” para “y-x” quando uma das expressões corretas poderia ser *3x+7*.

No grupo do Dinis, quando estavam a tentar descobrir a expressão analítica, desenrola-se a seguinte discussão entre o Dinis e o Zito:

> **Zito**: Vamos descobrir mas é a constante de proporcionalidade.
> **Dinis**: A constante é mais 3.
> **Zito**: Isto não tem constante direta (…) Se dividirmos o número de quadrados pelo número da figura não temos a constante direta.
> **Dinis**: Qual é o número errado nesta tabela?
> **Joel**: Sei lá. (dando agora atenção ao que os colegas diziam).
> **Zito**: Nenhum, porque essa calculadora é um génio.
> **Dinis**: Qual é o número errado nesta conta?

As situações de proporcionalidades direta são, habitualmente, bem compreendidas pelos alunos e chegam a generalizá-las mesmo quando não existe proporcionalidade, como aliás aconteceu com a tarefa dos *Azulejos*. O Zito confirma que não estão perante uma situação de proporcionalidade direta mas o Dinis não parece muito convencido.

O grupo do Dinis, no final da primeira aula, tinha indicado a expressão algébrica “3n”. No início da segunda aula, questionei-os: “Agora vejam: *3n* é o termo geral? É isso que pretendem? Vejam se funciona para o primeiro termo. É melhor todos ouvirem: vejam se o termo geral *3n* funciona para a figura 1. O que escreveram está a começar no *10* (apontando para a sequência numérica que tinham escrito). Depois de ter lançado a dúvida afastei-me e seguiu-se o diálogo, entre os três rapazes:

Dinis: Pois, não dá. É mais 7.
Dinis e **Zito**: 3n mais 7.
Joel: Espera! A figura 1 tem 10 quadrados como é que é mais 7?
Dinis: Não, 10… ah! 3x1, 3 mais 7,10; 3x2, 6, mais 7, 13.
Zito: Apaga aqui o 3n e escreve 3n+7.

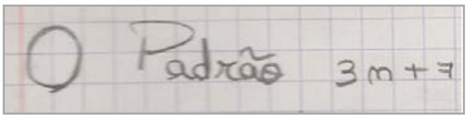


Figura 5.C. 24: Expressão algébrica apresentada pelo grupo do Dinis

A expressão algébrica apresentada no final da segunda aula pode ler-se na Figura 5.C. 24. Na tarefa é pedida a expressão analítica que representa a função em questão e os alunos apresentaram o termo geral da sequência numéria correspondente ao número de quadrados existente em cada figura. Este grupo aparenta reconhecer que a expressão algébrica que define o termo geral pode designar a expressão analítica da função. Isto é confirmado pelo diálogo apresentado a seguir onde podemos conhecer parte da discussão que deu origem à coavaliação do trabalho da Bruna (Figura 5.C. 25). Podemos ler, nos P*ontos fracos* e nas *Sugestões para melhorar o trabalho,* que referem faltar o termo geral correto e que a expressão analítica deverá ser corrigida (Figura 5.C. 26):

> **Zito**: Falta o termo geral
> **Dinis**: Iá, iá, falta o termo geral, era isso…Pontos fracos! Falta… E daí está aqui a expressão analítica.
> **Zito**: Mas é a expressão analítica.
> **Joel**: É o termo geral, praticamente. Falta o …
> **Zito**: Não corresponde lá muito ao certo.
> **Dinis** [escrevendo]: Falta o termo geral correto.

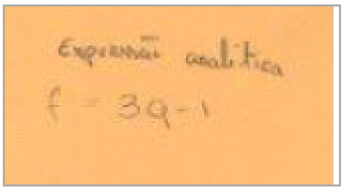


Figura 5.C. 25: Expressão analítica apresentada pelo grupo da Bruna

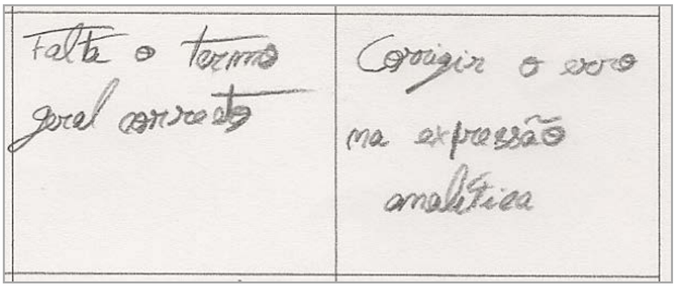


Figura 5.C. 26: Coavaliação do grupo do Dinis ao trabalho do grupo da Bruna

No grupo da Bruna, analisando a expressão analítica que apresentam (Figura 5.C. 25), parece que os alunos entenderam que o aumento de três quadrados de uma figura para a seguinte, pode ser traduzido, algebricamente, por “3q”. Contudo, não completaram a expressão adequadamente. As variáveis parecem estar trocadas, tendo em conta o contexto da situação. Esta troca talvez possa ser justificada porque pretendiam referir que aumenta 3 quadrados, daí a utilização da letra *q*, para variável independente.

Exploração: conexões

A tarefa teve na sua génese a conexão entre o tópico das *Sequências e regularidades* e o das *Funções*. No tópico das *Sequências e regularidades* quando representamos os termos de uma sequência numérica, eles surgem separados por um espaço ou por uma vírgula. Nas funções, o domínio e contradomínio são conjuntos. Um dos erros que encontrei foi não considerá-los como conjuntos, como escreveu o grupo do Dinis: identifica os elementos corretos, mas representa-os como sequências numéricas (Figura 5.C. 27).

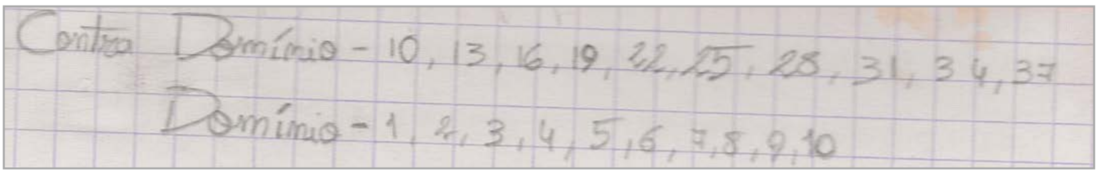


Figura 5.C. 27: Domínio e contradomínio apresentados pelo grupo do Dinis

Um dos alunos percebe que há diferença entre a simbologia utilizada nas *Sequências* e a utilizada nas *Funções*. No diálogo seguinte, o Dinis revela perceber esta distinção:

> **Dinis**: Para começar, Zito, 3n, n é para as ordens dos outros, não para as funções.
> **Zito**: O padrão não faz parte das sequências? Faz, não faz?

Numa aula posterior esclareci esta questão e um dos alunos referiu que usamos *n* quando são números naturais. Como será espontâneo em qualquer professor, fui invadida por um sentimento de tranquilidade e satisfação, mas não sou inexperiente ao ponto de pensar que é algo consciencializado por todos.

A linguagem simbólica traz dificuldades acrescidas. Alguns alunos revelaram já alguma compreensão, como se verifica na resolução do grupo da Sara, já referida anteriormente e que agora se evidencia (Figura 5.C. 28). Todavia, persistiram algumas confusões: estes alunos ainda não compreenderam que os valores de *f(x)* e de *y* são duas maneiras de designar os valores das imagens correspondentes a cada valor de x (Figura 5.C. 29), o que não é de estranhar dado o pouco trabalho ainda desenvolvido com estas noções.

Figura 5.C. 28: Parte da tabela apresentada pelo grupo da Sara

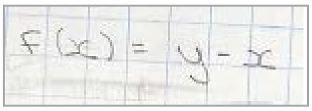


Figura 5.C. 29: Expressão analítica apresentada pelo grupo da Sara

Como se viu anteriormente, os alunos evidenciaram algumas conexões entre a simbologia utilizada nos tópicos *Sequências e regularidades* e nas *Funções*: à ordem de um termo associaram a letra *x* e aos valores dos termos da sequência, *y*. Identifiquei que mobilizaram os raciocínios que tinham desenvolvido na obtenção do termo geral para agora indicarem a expressão analítica da função considerada, embora com algumas dificuldades que eu não tinha previsto.

Na discussão coletiva o enfoque foi sobre a expressão analítica de uma função/termo geral de uma sequência. A seguir, apresento partes do diálogo que se desenrolou em que se verifica que a discussão foi alimentada por vários alunos, com as noções a serem construídas e as conexões a serem estabelecidas. Foi especialmente difícil orquestrar esta discussão, não por dificuldades de gestão de intervenções ou faltas de atenção por parte dos alunos, mas devido ao formalismo associado a estes conceitos:

Professora: O que é que é afinal isto da expressão analítica?
Damião: É a expressão que permite definir quantos quadrados tem uma figura x.
Rui: É o termo…
Bruna: Ah! Já sei, já sei, stôra.
Bruno: É 3x mais…
Professora: Esperem só um minuto. Vou então pedir ao Damião para repetir e espero que estejam com atenção.
Damião: É a expressão que nos diz o número de quadrados que a figura x tem.
Bruno: É 3x+7.
Rui: Era mais fácil dizeres…
Professora: Oh Rui a seguir dizes tu, está bem?
Damião: É a expressão que nos diz quantos quadrados tem a figura x diz quantos … [não se ouve].
A **professora** repete e o **Damião** completa: Neste caso com quadrados.
Professora: Compreendem o que isto quer dizer?
Alguns alunos: Sim!
Professora: Então? Rui, diz.
Rui: É uma expressão que serve para determinar o termo.
Eu repito e o **Rui** acrescenta: "o termo geral".
Professora: Então termo geral é o mesmo que expressão analítica?
Alguns alunos: Não/Acho que não/ Não sei.
Professora: Estou a fazer umas perguntas difíceis.
Dinis: No termo geral usa-se *n* e na expressão analítica usa-se o *x* ou outra letra.
Professora: Então, há diferença se eu usar o *n* ou o *x*?
Alguns alunos: Não, não.
Professora: Então porque é que umas vezes usamos *n* e outras usamos *x*?
Damião: O *n* é para os números naturais e o *x* é para as incógnitas.
Bruno: O *x* é para as equações.
Professora: Mais contributos? Mais… [Esperando]. Então, hoje vamos ver a diferença entre o termo geral e expressão analítica.

A discussão continuou com a determinação do termo geral, através da tabela (relembro que tinha sido determinado apenas por um dos grupos). Depois deste momento de discussão, foi oportuno realizar uma síntese escrita sobre a noção de termo geral.

Professora: Então isto é o termo geral! Então o que é que é isto do termo geral? O que nos dá o termo geral? Maria! [que tem o dedo no ar]
Maria: É a expressão que nos dá quando queremos saber a figura sem ser por tentativas.
Eu volto a repetir: "É a expressão que nos dá …", tendo a aluna completado: " o número certo de cada figura".
Professora: Como podemos escrever isto com maior rigor? É uma expressão…
Aluno: analítica…
Guilherme: Analítica, sintética [a professora e o aluno riem-se].
Professora: Não vamos escrever analítica e já explico porquê…
Bruno: Expressão algébrica!

Nesta altura decidi não avançar para a distinção entre expressão algébrica e analítica para não criar 'ruído' pois queria registar no quadro uma definição, partilhada, do conceito de termo geral, que os alunos passaram para o caderno. Surgiu:

> *Termo geral é a expressão algébrica que nos dá o valor de qualquer termo, dado o valor da ordem. Isto é, dá-nos o número de quadrados de determinada figura, nesta situação.*

Deu-se continuidade à discussão, identificando as vantagens da utilização do termo geral. Nesta altura tinha havido oportunidade para desafiá-los a identificarem a ordem de um determinado termo, levando-os a uma equação. Não o fiz para não envolver mais noções que poderiam ter um efeito de dispersão da atenção do que realmente pretendia.

Dando seguimento, relembrámos a noção de função, esclarecendo a confusão com a noção de função injetiva; conceitos associados e modos de a representar. Questionei-os sobre a razão por que a correspondência em estudo era uma função:

> **Professora**: Esta relação pode ser representada através de uma expressão, que nas funções, eu sugeri que nós chamássemos expressão analítica. E nas funções nós representamos a expressão analítica por *f (x)*, *g(x)*. Está bem? Agora digam-me, se eu usar a linguagem das funções, qual é a expressão analítica? Dinis?
> **Dinis**: De *y* e *x*.
> **Professora**: A cada x correspondia um y. E qual é a expressão analítica desta correspondência? Desta função que aqui temos?

Após algumas intervenções dos alunos, escreveu-se no quadro *3n+7*. E acrescentei em tom de desafio:

> **Professora**: Há aqui uma coisinha com que eu não estou a concordar.

Depois de alguns contributos pouco consistentes, em que os colegas falavam de *n*, pergunta a Maria:

> **Maria**: Oh stôra! O *n* mete-se à mesma, mesmo estando entre parênteses? [Na tabela tinha acrescentado *x* e *f(x)*]
> **Rodolfo**: Não deveria ser em função de *x*?
> **Professora**: Se eu estou a generalizar o número da figura com *x*…
> **Bruno** [interrompendo]: Pode ser *3x*? Não! Tem de ser, acho eu.
> (…)
> [Os alunos ficam com dúvida se a letra que escrevi é um x ou um n]
> **Professora**: Às vezes, na Matemática, a simbologia complica-nos a vida, mas não vamos deixar que nos atrapalhe. Deixem-me só explicar: nós nas funções, habitualmente, para a correspondência entre as variáveis, usamos *x* e *f(x)*. Está bem? Eu poderia usar também …*n* e *f(n),* na mesma, e a expressão analítica seria *3n+7 (escrevi a seguir a f(n))*?
> **Bruno**: Podemos usar *p*? Podemos usar a letra que quisermos?
> **Professora:** Podes usar a letra que quiseres. Porque é que nós nas sequências usamos o *n*?

> **Zito:** Porque é os números naturais.
> **Professora**: É os números naturais. E nas funções podemos não trabalhar apenas com números naturais podemos trabalhar com números decimais. Por isso usamos *x* e não usamos *n*. O n está muito vinculado aos números naturais. Mas reparem uma coisa! Qual é a relação entre o termo geral e a expressão analítica? [repete] Esta pergunta é muito importante.
> **Bruno**: Só não tem o *f* e o *x* entre parênteses.
> **Professora**: É a simbologia, não é? Reparem: *3x+7* é uma expressão algébrica. *3n+7* é a mesma expressão algébrica. O que nos dá é a relação entre variáveis. O processo que têm para calcular o termo geral das sequências, e nisso vocês estavam muito bem, é o raciocínio que podem usar quando querem calcular a expressão analítica desta função. Porque a relação é a mesma. Faz sentido o que estou a dizer? **(…)** Está a ter algum significado para vocês? Nós vamos continuar a trabalhar com as expressões analíticas das funções.

Queria explicitar que optei por designar as expressões algébricas que definem relações funcionais entre variáveis por 'expressão analítica'.[22]

Depois desta discussão fiquei com a sensação de que foi dado mais um pequeno passo para que os meus alunos estejam despertos para as conexões que se estabelecem entre os temas matemáticos que vamos explorando.

Síntese

Alguns conceitos aparentam estar pouco consolidados. Os alunos revelaram fragilidades: na compreensão da correspondência entre as variáveis em estudo e na definição da expressão analítica; na escolha da variável que deverá ser representada em cada um dos eixos do referencial cartesiano; na construção do gráfico da função; na definição de função e confusão com a definição de função injetiva.

Verificou-se que alguns alunos desvalorizam a sequência pictórica pois é rapidamente 'esquecida'. Os alunos depois de contarem os quadrados de cada figura, construíram a sequência numérica e chegaram à expressão algébrica sem atribuírem significado geométrico aos termos que a constituem. Poder-se-ia ter discutido o que representava na sequência pictórica, o 7 que surgia na expressão algébrica simplificada.

Confirmou-se a importância de trabalhar em paralelo as diferentes representações das funções. A tabela é sem dúvida uma representação 'poderosa' como 'andaime' para outras representações. Quando se trabalha com tabelas a noção de linha e coluna está

[22] O manual adotado, quando se refere à expressão que define a função, tanto usa 'expressão algébrica' como 'expressão analítica'

bem explícita e é fundamental que estejam bem definidas. Assim, desde cedo negoceio com os alunos a distinção entre o que designamos por linha e por coluna, de modo a que estas ideias vão sendo apropriadas.

Salientou-se a necessidade de discutir com os alunos o que eles consideravam ser o gráfico de uma função, o papel das linhas auxiliares e importância da escala. Enquanto não amadurecerem os significados de variável independente e dependente é importante que os alunos possuam 'âncoras', onde se baseiem, aquando da designação das variáveis a representar em cada um dos eixos do referencial.

A expressão analítica é a representação das funções que mais dúvidas suscita nos alunos e foi confirmado nesta tarefa. Surpreenderam-me as dificuldades manifestadas na indicação da expressão analítica, especialmente por alunos que tinham revelado um bom raciocínio na obtenção do termo geral das sequências. Provavelmente não compreenderam que poderiam obter a expressão analítica através desses raciocínios.

Relativamente à simbologia, os alunos tanto usaram as notações formais ($f(x)$), como escolheram letras associadas ao contexto, para designar as variáveis em estudo. Comprovei, uma vez mais, a existência, nos alunos, de dificuldades na comunicação escrita. Na comunicação oral conseguem ter algum sucesso na explicação das suas ideias, mas na transposição para o registo escrito, uma parte significativa do que os alunos analisam e discutem perde-se.

6. Ideias matemáticas e conexões estabelecidas

O significado matemático é obtido através do estabelecimento de conexões entre a ideia matemática em estudo e os conhecimentos já adquiridos pelos alunos. Uma nova ideia é significativa para cada indivíduo, na medida em que ele for capaz de a relacionar com os conhecimentos que já possui. As conexões são estabelecidas entre ideias matemáticas mas também entre ideias matemáticas e outros aspetos do conhecimento e experiências pessoais de cada um (Bishop & Goffree, 1986).

Neste capítulo, dando continuidade à análise de dados, procuro dar resposta às questões do estudo, sistematizando estratégias e dificuldades manifestadas pelos alunos, numa categorização das conexões estabelecidas. A seguir apresento cada uma das categorias, acompanhadas de uma breve descrição. Alguns aspetos referidos 'atravessam' mais do que uma categoria.

Processos e conexões entre processos. Neste ponto saliento os processos que os alunos desenvolveram e como os relacionaram, dentro dos tópicos matemáticos estudados;

Conceitos e conexões conceptuais. Apresento aqui algumas das relações estabelecidas entre os conceitos nos tópicos matemáticos trabalhados;

Linguagem e conexões entre linguagens. Embora este ponto pudesse estar integrado no ponto seguinte das representações, procuro com este tratamento separado, evidenciar como as linguagens algébrica e geométrica se interligam nas tarefas trabalhadas e como a linguagem algébrica foi sendo apreendida pelos alunos;

Representações e conexões entre representações. Aqui explicito exclusivamente aspetos ligados às representações de uma função que foi estudada na tarefa *Padrão Geométrico e Função*;

Conexões informais. Durante a descrição da exploração das tarefas referi-me a 'âncoras' que os alunos utilizaram. Neste ponto refiro as associações realizadas pelos alunos e que foram relevantes na consolidação de novas ideias matemáticas.

Processos e conexões entre processos

Obtenção do termo geral e da ordem de um termo de uma sequência. A noção comum a todas as tarefas exploradas e que pretendia que os alunos apreendessem e consolidassem, é a noção de termo geral. Numa dada sequência, os alunos tanto tinham de determinar o termo geral como confirmar se determinada expressão algébrica o poderia representar. Nas primeiras tarefas, quer na do *Voo em V*, quer na dos *Azulejos* (secção A.), embora a expressão *Termo Geral* não apareça no enunciado das tarefas, os alunos já a conheciam de tarefas realizadas anteriormente. O termo geral surge na tarefa *Termo Geral de Sequências e Equações* (secção B.), como ferramenta matemática para obtenção de termos da sequência e de valores da ordem dos termos (dados os respetivos termos da sequência). Na última tarefa, *Padrão Geométrico e Função* (secção C.), surge uma sequência pictórica à qual é associada a sequência numérica correspondente ao número de quadrados de cada figura. É estabelecida uma correspondência entre o número da figura e o número total de quadrados existentes nas primeiras 10 figuras da sequência pictórica fornecida. A expressão que define o termo geral da sequência numérica referida coincide com a expressão analítica da correspondência considerada.

Ponte, Branco e Matos (2009a) e Vlassis e Demonty (2008) referem três processos de obtenção do termo geral de uma sequência numérica associada a uma sequência pictórica a que os alunos recorrem. O primeiro processo tem como base a identificação da "razão" da progressão aritmética correspondente à sequência em estudo e foi utilizado pelos alunos do grupo do Dinis em todas as sequências que surgiram nas tarefas exploradas. Os alunos deste grupo procederam do seguinte modo: (1) identificaram o aumento constante entre os termos consecutivos da sequência em estudo; (2) multiplicaram esse valor constante por *n* (número da figura); e (3) adicionaram, ao monómio obtido, o número necessário de modo a ter a expressão geradora de todos os termos da sequência.

Por exemplo, o Dinis na tarefa do *Voo em V*, depois de o grupo ter constatado que de figura para figura se acrescentava sempre mais 2 pontos, explica aos colegas que o termo geral tem de ser *2n+1*, porque "se fosse 2n, começaria no 2, 4, 6, 8. Mas como é no 3, 2+1…". Outro exemplo de utilização de parte deste raciocínio ocorre na intervenção da Sara quando na tarefa *Padrão Geométrico e Função*, ela afirma "se cresce sempre mais 3, então é *n3"*.

O segundo processo assenta na manipulação numérica onde os alunos contam o número de elementos de cada uma das figuras e relacionam-no com o número da figura em questão. Este procedimento tem por vezes o suporte da representação tabelar, entretanto construída. Não houve evidência de utilização deste processo, nem mesmo na tarefa *Padrão Geométrico e Função*, quando era solicitado que os alunos construíssem uma tabela.

Por fim, o terceiro processo consiste na análise do modo como os elementos que constituem cada figura, se dispõem ("propriedades das figuras" como refere Ponte, Branco e Matos, 2009a, p. 61) e em relacioná-los com o número dessa figura. Esta associação na exploração de padrões é importante para o desenvolvimento da capacidade de generalização (uma das vertentes do pensamento algébrico) e para o desenvolvimento do sentido do símbolo (Borralho & Barbosa, 2011; Vale, Palhares, Cabrita, & Borralho, 2006b). Nas tarefas propostas, os alunos tinham ao dispor, sequências pictóricas a partir das quais estabeleceram relações e puderam argumentar sobre elas. Foi o exemplo do Zito que, na tarefa do *Voo em V*, depois de o Dinis apresentar o termo geral da sequência, avança com 'outro' termo geral, com base na observação de que, em cada 'bando' o número de pontos de um dos lados coincide com o número da ordem desse 'bando', e o outro lado "é sempre mais um que a ordem". E ainda afirma: "imagina que este lado é o lado da ordem", evidenciando como a estrutura geométrica das figuras permitiu relacionar o número da ordem com uma das 'componentes' da figura, facilitando a generalização, primeiro em linguagem natural (não registada nas suas produções escritas) e depois em linguagem formal: $n+ (n+1)$.

Na tarefa dos *Azulejos*, foi o Mário que explicou que o número da figura coincidia com o número de azulejos cinzentos que formam a linha inferior dessa figura, e a expressão algébrica do termo geral $3n+6$, foi construída a partir de sucessivas associações geométricas ($3n$ por termos 3 linhas com o mesmo número de quadrados e adiciona 6 pois restam as colunas 'de fora', cada uma com 3 azulejos). O apoio visual contribuiu para que os alunos tivessem sucesso no processo de generalização.

Neste último processo, é a estrutura geométrica das figuras que ao suscitar diferentes modos de 'olhar' e de interpretar o padrão leva à obtenção de diferentes expressões algébricas para o termo geral da sequência numérica associada, desenvolvendo o raciocínio matemático dos alunos, numa conexão entre a *Geometria* e a *Álgebra*. Esta conexão entre estes dois temas matemáticos foi também evidenciada quando os alunos, na tarefa do *Voo em V*, se apoiaram na simetria de reflexão das figuras: cada figura tem tantos pontos de um lado como do outro *(n+n)* e mais um ponto no topo, sendo o termo geral representado por *(n + n)+1*. Em contextos como estes, as letras aparecem como números generalizados, associadas a uma interpretação geométrica.

De acordo com Oliveira (2004), trabalhar as expressões algébricas a partir das representações geométricas contribui para a sua compreensão - "reiteramos a nossa certeza de que saber Matemática exige, entre outras habilidades, a capacidade de inter-relacionar conhecimentos em um mesmo contexto e gerar significados diversos para um determinado conhecimento, transitando por contextos diversos" (p. 46).

Para a obtenção da ordem de um determinado termo, surgiu a utilização de um processo misto que consistiu num 'vai e vem', entre uma representação da figura a descobrir (Figura 6. 1) e um raciocínio aritmético estruturado.

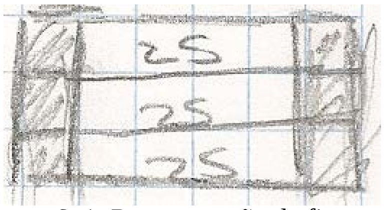


Figura 6. 1: Representação da figura na questão 1.3. da tarefa dos Azulejos

Na discussão da tarefa dos *Azulejos,* o Joel explicou como descobriu a figura com 81 azulejos: compreendendo a estrutura do padrão envolvido, 'retirou' os três azulejos da primeira e da última coluna (que se mantêm em todas as figuras da sequência) obtendo 75 e depois experimentou vários números para descobrir aquele que multiplicado por 3 (3 linhas) perfizesse 75. Se o trabalho se centrasse apenas na manipulação aritmética, a argumentação dos alunos seria, certamente, mais abstrata (Vlassis & Demonty, 2008).

Nesta mesma tarefa nenhum dos grupos obteve a expressão *3(n+2)* para termo geral da sequência numérica correspondente à sequência pictórica dada. Esta expressão ao ser proposta na questão 1.8. (ver Anexo 3), foi interpretada geometricamente e através de 'raciocínios geométricos' obtiveram a ordem do termo pedida.

O Dinis quando, na tarefa do *Voo em V,* lhe é pedido o número da figura com 86 pontos, obtém um valor errado porque realizou as operações inversas numa ordem indevida. No entanto, como pude seguir no registo áudio, o aluno antes de registar o valor que obteve, substituiu esse número no termo geral já encontrado anteriormente e verificou que estava errado. Este aluno, provavelmente por estranhar algo de que não consegui aperceber-me, decidiu verificar a sua resposta, não se apoiando na figura e sim no termo geral em que aparentemente confiava. Este episódio revela uma capacidade de analisar criticamente o seu trabalho e alguma compreensão da noção de termo geral e das diferentes possibilidades da sua utilização.

Na análise do que foi explorado, parece-me que, a noção de termo geral de uma sequência numérica e a capacidade de o representar algebricamente foi compreendida por grande parte dos alunos, indo de encontro a um dos objetivos específicos do PMEB para este tópico matemático. Os alunos revelaram serem capazes de, a partir do termo geral, determinar termos de várias ordens e a ordem de um determinado termo.

Resolução de equações. A aprendizagem da noção de equação deve ser iniciada a partir do 1.º ciclo de escolaridade, devendo ser apresentada como uma igualdade onde consta um valor desconhecido; deve seguir no 2.º ciclo, com equações que envolvam apenas uma operação, em que uma letra aparece a representar um valor desconhecido (a ser introduzida no momento em que o professor considere adequado). No 3.º ciclo, os alunos devem compreender que uma equação envolve "uma igualdade entre duas expressões, em que alguns valores são desconhecidos" (Ponte et al., 2009a, p. 93). Contudo, os alunos envolvidos neste estudo, por terem o novo PMEB apenas a partir do 7.º ano de escolaridade, não devem ter tido qualquer contato com a noção de equação.

Na introdução do estudo das equações, os alunos vão aprender novos conceitos e terminologia: o de incógnita, de solução de uma equação e revelarem um bom domínio dos vários significados que pode tomar o sinal de igual (Vlassis & Demonty, 2008). De acordo com estas autoras é fundamental que os alunos compreendam a noção de equação, as suas potencialidades como ferramenta matemática na resolução de problemas, bem como o que representa a sua solução. A opção de introduzir as equações no contexto das sequências numéricas associadas ao seu termo geral parece-me ter contribuído para a concretização destes objetivos.

Vlassis e Demonty (2008) referem vários métodos de resolução de equações. Um deles, é denominado "método da substituição", e "consiste em substituir a incógnita por um valor com o objetivo de estabelecer uma igualdade verdadeira" (p. 63). Este método revela a compreensão da equação, e com alguma facilidade os alunos obtêm a solução. No grupo da Rute, mal o colega lê no enunciado da tarefa do *Termo Geral de Sequências e Equações*, $n+2=40$, respondem de imediato *38*. Na resolução da equação $2n+5=45$, os mesmos alunos explicitam na produção escrita, que $2n$ tem de ser *40* e decompondo $2n$ em $n+n$, encontram a solução da equação. Este método, designado por

Vlassis e Demonty (2008) como *recuperação*, é um procedimento recorrente, que consiste em considerar como incógnita o monómio *2n*. Na tarefa, a sequenciação das equações por grau de dificuldade crescente, poderá ter contribuído para que os alunos reconhecessem e aplicassem a mesma estratégia de resolução nestas duas equações, evoluindo assim na aprendizagem de métodos informais para as resolver.

Um outro processo de resolução de equações aritméticas[23] é um método baseado nas operações inversas. Este foi o método utilizado pelos alunos do grupo do Dinis, logo na tarefa do *Voo em V*, para calcular a ordem do termo 135, num momento em que ainda não se tinha formalizado a noção de equação. Este método foi por eles utilizado, de modo sistemático, nas tarefas seguintes.

Com a tarefa *Termo Geral de Sequências e Equações* pretendia que os alunos desenvolvessem um método intuitivo de resolução de equações do tipo aritmético, integradas num contexto em que a incógnita surgia com significado (ordem de um termo). Verifiquei que os alunos perante equações simples, foram capazes de desenvolver estratégias próprias para a descoberta da incógnita.[24]

Este trabalho inicial, com as equações, apelando à intuição e ao desenvolvimento de estratégias pessoais de resolução das equações, valoriza os conhecimentos espontâneos dos alunos, antes da aprendizagem de estratégias formais. Esta opção encontra suporte em estudos que "assinalam que a competência matemática se define por um olhar simultaneamente intuitivo e formal" (Vlassis & Demonty, 2008, p.69) e nas palavras de Sebastião e Silva (1975) - "Se não houver tempo - o que é bem provável - podem-se omitir as demonstrações. O que importa, por enquanto, são as intuições: essas de modo nenhum devem faltar" (p.81).

Alguns alunos, após terem aprendido as regras formais de resolução das equações, pareceram 'abandonar' as estratégias que tinham desenvolvido. A meu ver, deve haver uma sensibilização para a importância destas estratégias intuitivas, a par da valorização da aprendizagem de regras formais.

[23] Equações com incógnita em apenas um membro, referidas por Vlassis e Demonty (2008)
[24] É de referir que estes métodos, o das "operações inversas" e o da" substituição", mobilizam uma noção de igualdade que envolve o 'apresentar' de um resultado

Dificuldades

O 'vínculo' a uma ideia matemática. Os alunos do grupo do Dinis, no início da resolução de cada tarefa, focalizaram a sua atenção na descoberta do termo geral. Após o terem descoberto, parecem ter criado uma ligação 'cega' com ele pois mesmo quando o enunciado apresentava uma expressão algébrica diferente (mas equivalente), através da qual, os alunos responderem aos itens, eles não o fizeram. Continuaram a aplicar a expressão inicialmente descoberta por eles. O mesmo aconteceu no procedimento que envolvia a aplicação das operações inversas: utilizaram-no sistematicamente mesmo quando, na tarefa *Termo Geral de Sequências e Equações*, poderiam ter justificado a sua resposta com base na resposta dada à questão anterior (estratégia que já tinham implementado na realização de uma outra tarefa).

O uso da recorrência para definir a sequência. O Zito, na tarefa do *Voo em V,* na interação do grupo em que os alunos procuram descobrir o termo geral da sequência, ele afirma que é $n+2$ (expressão errada). No diálogo percebe-se que, o Zito define a sequência por recorrência, em linguagem natural, dizendo que de figura para figura acrescenta-se sempre mais dois pontos. Contudo, apresenta dificuldades ao tentar determinar o termo geral da sequência, afirmando ser $n+2$. Este exemplo confirma o referido na *Brochura da Álgebra* (Ponte et al., 2009a), acerca da abordagem recursiva: "Esta estratégia muitas vezes constitui um obstáculo à determinação da relação entre cada termo e a sua ordem. Por outro lado, pode também conduzir a generalizações erradas" (p.45).

Utilização de um raciocínio proporcional. Em contextos que envolvem uma taxa de variação constante, é previsível que os alunos utilizem raciocínios proporcionais. Esta estratégia, definida em Ponte et al. (2009a) por "estratégia do objeto inteiro, o aluno pode considerar um termo de uma dada ordem e com base nesse, determinar o termo de uma ordem que é múltipla desta." (p. 45). Esta estratégia funciona apenas quando há proporcionalidade direta.

Na tarefa dos *Azulejos*, o António utilizou um processo baseado na aplicação de proporções, numa situação em que não havia proporcionalidade direta. Este processo foi refutado na discussão da tarefa, num diálogo muito participado. A ênfase que dei, na altura, a este procedimento inadequado à situação, poderá ter contribuído para que os alunos do grupo do Dinis, numa tarefa posterior (*Padrão Geométrico e Função,* secção C), tivessem testado se estavam ou não perante uma situação de proporcionalidade direta. Neste grupo, o Zito sugeriu que calculassem a constante de proporcionalidade, a que o Dinis respondeu "a constante é mais 3". O Zito alerta: "Isto não tem constante [de proporcionalidade] direta: se dividirmos o número de quadrados pelo número da figura não temos a constante". No entanto não convence o colega, pois este questionou o que de errado estava na tabela. Visto não ter havido um comentário explícito do Dinis, não consigo inferir sobre a sua compreensão da situação. Contudo, o aluno escreveu "3n" na resolução do grupo, o que seria uma expressão correta, se estivéssemos perante uma situação de proporcionalidade direta, o que não era o caso.

Conforme anteriormente referido, os alunos cometem frequentemente o erro de utilizarem raciocínios proporcionais, quando não existe proporcionalidade. Nesta linha, Vlassis e Demonty (2008) referem que a grande maioria dos erros são apoiados em alguma forma de raciocínio, resultando da aplicação de procedimentos corretos em situações que não são válidos.

Conceitos e conexões conceptuais

Termo geral de uma sequência e equação. A noção de equação foi introduzida de um modo natural, apresentando-se como uma ferramenta matemática na obtenção dos valores da ordem a que correspondem os termos dados de uma sequência numérica. Ao estabelecer a conexão do termo geral de uma sequência com as equações, permitiu que a incógnita surgisse com significado, representando a ordem de um dado termo. Por outro lado, os alunos puderam apoiar-se nos raciocínios geométricos que realizaram na descoberta do termo geral de cada sequência, para agora encontrarem a solução da equação em estudo. Permitiu ainda sensibilizar os alunos de que os temas matemáticos não são estanques.

Termo geral de uma sequência e expressão analítica de uma função. Os alunos revelaram alguma destreza na obtenção do termo geral de uma sequência numérica. Os raciocínios que na altura desenvolveram poderiam ter sido utilizados na obtenção da expressão analítica da função, que surgiu na tarefa *Padrão Geométrico e Função*. A meu ver, esta conexão não foi bem conseguida, por se ter realizado a uma distância temporal do estudo das *Sequências e regularidades* e que poderá ser desenvolvida no 8.º ano de escolaridade, com o estudo das funções afins.

Termos gerais relacionados. A sequência do número de pontos de cada figura, na tarefa do *Voo em V*, é a sequência dos números ímpares maiores do que 1. A partir dela surgiu a oportunidade de explorar a sequência dos números ímpares e a dos números pares, determinando os termos gerais respetivos. Nesta situação a *Álgebra* surgiu como generalização da aritmética na perspetiva de Blanton e Kaput (citado em Canavarro, 2009, p. 89), contribuindo para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Dificuldades

O significado do sinal de igual. Nos primeiros anos, o sentido do sinal de igual é associado, habitualmente, ao resultado de uma operação, perdurando este significado até tarde, perturbando outros significados. No entanto, é fundamental que também se explore situações em que este sinal seja conotado como uma equivalência entre duas expressões (Ponte et al., 2009a). Verifiquei que os alunos realizaram várias operações aritméticas de um modo sequencial, da esquerda para a direita, utilizando o sinal de igual, tanto para introduzir cada resultado obtido a partir de valores numéricos anteriores, como para separar os cálculos efetuados.

Definição de função e de função injetiva. A justificação de que determinada correspondência é ou não uma função, suscitou dificuldades nos alunos. Um dos grupos optou por afirmar que uma função "é uma correspondência unívoca", mas questiono até que ponto atribuem significado a essa afirmação. A definição de função, como uma correspondência que a cada elemento de um conjunto corresponde um e um só elemento de outro conjunto, suscita muitas confusões com a noção de função injetiva, mesmo em alunos de anos de escolaridade mais avançados. Parece-me que o caráter unívoco da correspondência leva a que os alunos também considerem que cada imagem seja correspondente de apenas um objeto. Embora no início do trabalho com funções, tenha apresentado exemplos e contraexemplos, ilustrando todas as situações possíveis, na tarefa do *Padrão Geométrico e Função*, o grupo do Dinis afirma: "esta função é unívoca porque todos os objetos têm correspondência e nenhum tem a mesma imagem que os outros objetos" (secção C., Figura 5.C. 16).

Linguagem e conexões entre linguagens

Explicação do padrão. Nas tarefas foi pedido aos alunos, quer através do enunciado da tarefa, quer oralmente no momento da discussão coletiva, que explicassem o padrão existente em cada sequência pictórica. Ao pedir a "regra", antes da determinação do termo geral da sequência numérica associada, pretendia que os alunos passassem por uma fase de verbalização, exprimindo a lei de formação na linguagem que lhes é mais familiar, antes da formalização, seguindo a orientação de Vlassis e Demonty (2008). Dar significado aos símbolos utilizados, que emergiram das expressões verbais, contribuía para que a manipulação de símbolos não se fizesse no vazio, permitindo aos alunos encarar a *Álgebra* como uma linguagem com maior compreensão. Nesta fase da aprendizagem dos alunos, a generalização não deve basear-se apenas na linguagem natural, nos diagramas, nas tabelas mas também na utilização da notação algébrica convencional (Canavarro, 2009; PMEB, 2007).

Os alunos, antes da aplicação das tarefas envolvidas no estudo, trabalharam situações propostas pelo manual, onde já não era pedida a formulação da lei em linguagem natural, pedindo exclusivamente o termo geral. Os elementos do grupo do Dinis, nas tarefas do *Voo em V* e na dos *Azulejos*, pareceram desvalorizar a generalização em linguagem natural, em detrimento da obtenção da expressão algébrica, talvez influenciados pelas experiências ainda recentes com as tarefas do manual. Aliás, o Zito afirmava que o termo geral "é o mais importante". Poderá ter sido esta a razão pela qual este grupo de alunos não registou, em linguagem natural, os seus raciocínios recursivos.

Simbologia e manipulação algébrica. Os símbolos permitem expressar ideias matemáticas de forma rigorosa e condensada. Contudo, estes podem ter significados distintos, conforme o contexto em que são usados, e reside na interpretação desses significados grande parte das dificuldades dos alunos (Ponte, Branco & Matos, 2008). Um aspeto chave na compreensão matemática, é o domínio da linguagem matemática, e em especial da sua simbologia.

Na tarefa *Termo Geral de Sequências e Equações,* a letra surge com significados distintos: no termo geral, o *n* surge como um número generalizado, enquanto por exemplo, em $n+2= 40$, representa uma incógnita. Nesta mesma tarefa, os alunos atribuíram um valor numérico à letra, transformando cálculos algébricos em cálculos aritméticos, aparentemente sem dificuldade. Vlassis e Demonty (2008) alertam para a urgência de ajudar os alunos a que, desde cedo, encarem a letra como um número generalizado.

Nas tarefas exploradas emergiram diferentes expressões algébricas, para representar o termo geral da sequência numérica, obtida a partir de uma sequência pictórica. O trabalho neste sentido permitiu, contribuir, a meu ver, para que o cálculo algébrico fosse realizado com compreensão e não fosse associado a um jogo de manipulação de letras. Os alunos foram capazes de atribuir significado às expressões algébricas. Relembro o extrato em que o Zito defende que registem "n3" em vez de "3n" porque o *n* representava o número de quadrados cinzentos na base da figura, que coincidia com o número da figura e só depois tinha de multiplicar por 3 pois havia 3 linhas em cada figura. Repare-se que os alunos já adotaram a escrita abreviada, incluindo a omissão do sinal de multiplicação.

Os alunos, ainda com pouca experiência com expressões algébricas, já revelaram alguma habilidade na manipulação algébrica das expressões, quer através da simplificação para provar a equivalência entre expressões, quer no processo inverso. O domínio da linguagem algébrica, revelou-se na tarefa dos *Azulejos*, em que os alunos tinham de justificar a equivalência de expressões algébricas $(n+2)+(n+2)+(n+2)=3(n+2)= 3n+6$. Pareceu-me ser intuitivo a generalização das propriedades das operações, até agora só trabalhadas em contexto aritmético. Simplificar expressões como no exemplo anterior parece-me contribuir para que os alunos criem uma conceção estrutural das expressões algébricas, isto é, considerem como uma entidade 'estática', não havendo lugar à apresentação de um número como resultado de um cálculo.

Conforme descrito, o inverso da simplificação algébrica também foi realizado com sucesso, no episódio em que os alunos do grupo da Sara decompõem a expressão $2n+1$ em $n+n+1$, de modo a calcularem a solução da equação $2n+1=1001$. Aparentaram compreender que as expressões algébricas representam um valor numérico, quando se concretiza o valor da letra, contribuindo também para a consolidação da noção de letra como um número generalizado.

No trabalho com expressões algébricas é importante que os alunos compreendam a noção de equivalência de expressões. A equivalência de expressões algébricas pode ser analisada de dois modos (Ponte et al., 2009a):

1) *De modo numérico* – substituindo a letra por alguns valores de modo a comprovar a obtenção do mesmo resultado. Este procedimento foi utilizado pelo grupo do Dinis quando, na tarefa dos *Azulejos*, para verificar se determinada expressão representava o número total de azulejos (questão 1.5.), substituíram a letra por dois valores distintos (*n=1* e *n=4*), verificando que obtinham o mesmo número de quadrados (Figura 5.A. 20). De referir que este método é válido por se tratar de polinómios do 1.º grau com uma incógnita. Embora os alunos tivessem sido alertados para este aspeto, penso que só irão tomar real consciência das suas limitações, quando se confrontarem com uma situação em que este já não seja eficaz. Por exemplo, no 8.º ano de escolaridade, quando explorarmos sequências cujo termo geral seja um polinómio do 2.º grau. Neste processo, ao calcular o valor da expressão algébrica para vários valores numéricos, contribui-se, também, para a compreensão da letra como um número generalizado;

2) *De modo algébrico* - através da simplificação de expressões algébricas verificou-se que se obteve a mesma expressão. A título de exemplo, na expressão referida atrás, a Rute explicava que *(n+2) + (n+2) + (n+2) = 3 (n+2)* "porque é três vezes o *n+2*: *n+2*, mais *n+2*, mais *n+2*", o Paulo concluía que *(n+2)+(n+2)+(n+2)=3n+6* "porque *3 enes* é igual a 3 vezes o *n* e depois 2 mais 2 mais 2 é igual a 6".

Segundo Ponte et al. (2009a), a verificação da equivalência de expressões algébricas contribui para a compreensão dos símbolos e promove a compreensão da manipulação algébrica. Vlassis e Demonty (2008) alertam para que: nas expressões algébricas convém evitar a utilização de letras "abreviaturas", como por exemplo, *n* para número, *m* para mesas. A conceção da letra-objeto está grandemente difundida nos alunos e que estes deverão evolui para um patamar de "letra-número generalizado" (p.148).

A formalidade na linguagem matemática não é simples. Veja-se o exemplo no contexto das funções: designamos por *y* a ordenada de um certo ponto do sistema de coordenadas enquanto noutras vezes estamos a referir-nos a um certo valor da função. A interpretação depende do contexto, o que pode confundir o aluno (Saraiva, Teixeira & Andrade, 2010). Retomo a expressão analítica apresentada pelo grupo da Sara, na tarefa *Padrão Geométrico e Função*, $f(x)=y-x$, em que a utilização da letras revela alguma confusão e que os alunos não conseguiram justificar. Pareceu-me importante discutir com todos os alunos em que situações é habitual utilizar a letra n ou a letra x e quando deveremos representar a expressão do termo geral como sendo $3n+7$ ou quando deveremos representar a expressão analítica de um função como $f(x)=3x+7$. Em vários momentos os alunos tanto usaram as notações formais $f(x)$ como escolheram letras associadas ao contexto, para designar as variáveis em estudo.

O aprofundamento da linguagem algébrica trouxe muitas convenções, que os alunos precisam de tempo e de experiências diversificadas para lhes darem significado, e as usarem adequadamente. Segundo Ponte et al. (2009a), "por vezes, compreendem perfeitamente do que se está a falar quando se diz que "a imagem de 5 é 3" mas não conseguem entender a expressão f (5) = 3" (p. 122).

Dificuldades

Compreensão do enunciado e explicação de raciocínios na forma escrita. Algumas dificuldades dos alunos prenderam-se com a compreensão do enunciado, sobretudo no que ali era pedido: "Escreve uma regra" e "Estuda o padrão. Explica-o". Estes alunos não traziam hábitos de explicar os seus raciocínios por escrito, revelando resistência em fazê-lo, e aparentemente não o valorizando.

Na exploração das tarefas, em mais de um momento, o Zito conseguiu explicar oralmente os seus raciocínios muito ricos, e muitas vezes surpreendentes. Recupero a associação que este aluno fez entre morfologia da palavra *unívoca* e a definição de função, que embora errada, revela uma intenção de dar significado aos termos utilizados, com que os alunos se deparam pela primeira vez. Contudo, em alguns episódios identifiquei no aluno alguma fraqueza na elaboração das produções escritas. Pareceu-me que não foi por preguiça ou por não gostar de escrever, mas por não ter percebido o que tinha de explicar, ou por não lhe reconhecer importância, conforme referi.

A título de exemplo, na tarefa *Termo Geral de Sequências e Equações*, no episódio que envolveu o Paulo, as dificuldades residiram na terminologia usada e não nos procedimentos que tinham de realizar. Esta tarefa não foi bem-sucedida na intenção de desenvolver a capacidade de reflexão e de comunicação escrita. Os alunos não responderam, por não terem percebido o que se pedia ou por ser uma parte da aula em que habitualmente revelavam pouca produtividade.

Houve dificuldades acrescidas na explicação escrita, sobretudo quando estavam envolvidos elementos geométricos. Na tarefa *Padrão Geométrico e Função*, os alunos, ao terem de explicar o padrão, fizeram alguma confusão na designação e utilização dos termos *linha* e *coluna.*

Representações e conexões entre representações

Como irei sistematizar neste ponto, surgiram diferentes formas de representar a função em estudo na tarefa *Padrão Geométrico e Função*, através da linguagem natural e algébrica, através de uma tabela e através do seu gráfico. Segundo Friedlander e Tabach (citado em Guerreiro, 2009, p. 21), o estudo da *Álgebra* e o trabalho com diferentes representações em paralelo, deve ser uma constante. Como para os alunos, algumas representações fazem mais sentido que outras, o uso de diferentes formas de representar, permitirá que mais alunos compreendam o que está envolvido. Segundo Bay-Williams (citado em Brocardo, Delgado, Mendes, Rocha e Serrazina, 2006, p.79) incluir várias formas de representação na mesma exploração, ajuda os alunos a identificar relações e a moverem-se de modo flexível entre as diferentes representações. Nesta linha, Saraiva et al. (2010) referem que a capacidade de representar e identificar o mesmo conceito em diferentes representações, e a conversão entre as diferentes representações, permite aos alunos observar relações importantes e desenvolver uma compreensão profunda do conceito. Estes autores alertam contudo, para que, no estudo das funções se faça a distinção entre o conceito de função e os seus diferentes tipos de representação.

Nesta tarefa confirmou-se, uma vez mais, que alguns alunos desvalorizaram a sequência pictórica pois foi rapidamente 'esquecida'. Os alunos, depois de contarem os quadrados de cada figura, obtêm a sequência numérica e chegam à expressão algébrica, sem atribuírem significado geométrico às parcelas que o constituem ($3n+7$). Eu poderia ter discutido a que correspondiam, na sequência pictórica, os valores 7 e 3 que surgem na expressão algébrica simplificada. Por outro lado poderia também ter evidenciando a conexão existente entre os valores numéricos que constituem a expressão analítica da função considerada, e como se refletem na representação gráfica. A minha opção foi a de adiar esta análise para o 8.º ano de escolaridade, com o estudo da função afim em que se pretendo explorar, com algum aprofundamento, as conexões entre as representações gráficas e as expressões algébricas, estudando a influencia dos parâmetros *a* e *b* em expressões do tipo $f(x)=ax+b$.

Tabela. A tabela é sem dúvida uma representação 'poderosa' como 'andaime' para outras representações. A partir dos valores nela organizados os alunos construíram a representação gráfica da função e também se apoiaram nela para descobrirem a expressão analítica. O Zito também se apoiou na tabela para verificar se estavam perante uma situação de proporcionalidade direta.

Quando se trabalha com tabelas existe confusão entre linhas e colunas. Assim, desde cedo, clarifiquei a distinção entre o que designamos por linha e por coluna, de modo a que esta ideia vá sendo apropriada.

Os alunos, na generalidade, não revelaram dificuldades na elaboração de tabelas. Algumas dúvidas que surgiram foram esclarecidas no seio dos seus grupos, durante o trabalho autónomo. Um dos aspetos problemáticos no estudo das funções, para além da relação funcional, passa pela compreensão e distinção entre variável independente e dependente. Antecipando esta dificuldade, em aulas anteriores à da exploração desta tarefa, os alunos foram alertados para que, numa tabela, os valores que surgem na primeira linha (ou primeira coluna), correspondem aos valores da variável independente, e esta deverá ser representada no eixo das abcissas do referencial cartesiano. Em consequência, na segunda linha (ou segunda coluna), surgem os valores da variável dependente, representados no eixo das ordenadas.

Representação gráfica da função[25]. Na representação gráfica de funções, os alunos têm de tomar várias decisões: ponderar em que eixos do referencial vão representar cada uma das variáveis; que escala definir em cada eixo; e como marcar os pontos envolvidos. Um dos aspetos que se evidenciou e foi discutido com os alunos foi o papel das linhas auxiliares na determinação dos pontos do gráfico. Reforcei a importância de elaborarem uma representação gráfica correta de modo a esta traduzir a 'imagem' correta da situação em estudo.

---

[25] Neste ano letivo assumindo o abuso de linguagem, usei o termo gráfico de uma função quando deveria referir representação gráfica da função.

Após a representação gráfica, podia ter sido evidenciada a conexão entre os valores numéricos que surgem na expressão analítica, e como estes estavam refletidos nessa representação. Após dada a expressão analítica $3x+7$, podia ter sido discutido o 'efeito' do valor 3 na representação gráfica (variação entre valores de ordenada consecutivos, quando as abcissas diferem de uma unidade). O valor 7 estaria sobre o eixo das ordenadas, correspondendo à abcissa zero, numa extensão do domínio. O valor de abcissa zero poderia ser associado ao número de uma figura (zero) que seria o elemento base das figuras da sequência pictórica. Esta conexão não foi evidenciada na discussão coletiva, pois privilegiei outros aspetos, tendo-se adensado de tal modo que considerei contraproducente acrescentar algo mais.

Dificuldades

Expressão analítica. A representação algébrica das funções é, segundo Guerreiro (2009) a representação que mais dificuldade suscita nos alunos. Refere a autora que "embora sejam capazes de reconhecer as variáveis, a interpretação e a escrita através da linguagem simbólica traz-lhes dificuldades" (p. 33), o que foi confirmado na resolução desta tarefa. Surpreenderam-me as dificuldades manifestadas na indicação da expressão algébrica, especialmente por alunos que tinham revelado um bom raciocínio na obtenção do termo geral das sequências. Provavelmente não compreenderam que poderiam obter a expressão analítica através desses mesmos raciocínios.

Escalas. Na tarefa *Padrão Geométrico e Função*, um número significativo de trabalhos apresentava, na representação gráfica, incorreções na definição da escala. Os alunos realizaram uma divisão errada do eixo das ordenadas. Os alunos argumentaram com "falta de espaço" e outros evidenciaram dificuldades na marcação de valores intermédios. Curiosamente, o Dinis durante a discussão do trabalho que realizei com o pequeno grupo, evidenciou conhecer as regras subjacentes à definição da escala, mas a questão da limitação do espaço sobrepôs-se ao rigor.

Domínio e contradomínio como conjuntos. Quando as sequências foram estudadas os termos de uma sequência numérica foram representados apenas separados por uma vírgula. Quando foi solicitado aos alunos, a indicação do domínio e contradomínio da função, o grupo do Dinis representou-os como se de uma sequência numérica se tratasse, sem a representação convencional de um conjunto. Estas noções, a par da noção de variável, de objeto e de imagem permeiam a compreensão do conceito de função contribuindo para a sua complexidade.

Conexões informais

Ordem de um termo e número da figura. No enunciado, na tarefa do *Voo em V*, surgiu a associação da ordem de um determinado termo ao número da figura que lhe corresponde. Essa associação prolongou-se ao longo do trabalho com as sequências, e mesmo quando não existia uma sequência pictórica, ela foi utilizada de modo a esclarecer os alunos que ainda não tinham a noção de ordem de um termo bem adquirida. O Zito esclareceu os colegas que a "ordem é o número da figura", e o Dinis ao explicar à Carla porque determinado valor não pode representar um termo da sequência, começa por dizer "é que não dá para dividires a meio o número da ordem, e isto é um número decimal". Quando a Carla o interroga porque "não se divide a ordem ao meio", ele recorre da associação da ordem ao número da figura – "Número da figura 1,5! Achas que isso está correto?".

"Domínio é o x, y é o contradomínio". Na explicitação do que é o domínio e o contradomínio, o Dinis refere que "Domínio é o x, y é contradomínio" ao qual o Zito acrescenta: "Domínio é o número da figura". Aqui está subjacente, por 'transitividade', a associação da ordem de um termo ao número da figura e à letra com que habitualmente representamos a variável independente, nas funções reais de variável real.

Identificar a variável independente e dependente. As noções de variável independente e dependente, numa relação funcional, não são simples. Enquanto os alunos não se apropriarem do que 'varia' em função do que 'varia' e assim conseguirem identificar a dependência de uma variável relativamente à outra, devem ter uma 'bússola' que os oriente na tomada de decisões aquando da construção das representações tabelar e gráficas. O que lhes forneci foi um esquema, com a associação atrás referida, entre as variáveis em estudo, as linhas da tabela e os eixos do referencial cartesiano. À medida que os alunos vão tendo outras experiências de aprendizagem, deverão ser estimulados a libertarem-se destes apoios e a interpretarem as variáveis no contexto em estudo.

Conexão entre questões e entre tarefas. Nas tarefas utilizadas, os alunos, em mais de um momento, aproveitaram aspetos de resoluções anteriores para responderem a novas questões. Todavia, na tarefa *Termo Geral de Sequências e Equações*, em que o encadeamento de duas questões tinha essa intenção estas não foram aproveitadas por nenhum aluno. Fatores externos[26] aos conteúdos envolvidos podem ter provocado a falta de atenção e de empenho por parte dos alunos, e condicionado uma resolução cuidada e refletida da tarefa. Esta situação vai ao encontro do que referi a propósito do item do PISA – "Macieiras", em que os alunos poderiam ter mobilizado o que é afirmado na questão 2 para responderem à questão 1. Pode ser indiciador de alguma falta de tradição na análise conjunta das várias questões da tarefa, tendo por objetivo uma melhor compreensão da situação em estudo.

A tarefa apresentada na secção B, *Termo Geral da Sequência e Equações*, potenciou o trabalho realizado nas duas tarefas anteriores. Penso que a concretização do PMEB, no tempo letivo disponível, e tendo em conta a falta de conhecimentos prévios que muitos alunos revelam, quando chegam ao 7.º ano de escolaridade, será facilitada se a planificação assentar em tarefas "a partir das quais os alunos se possam envolver em atividades matematicamente ricas e produtivas" (Ponte, 2005a, p.1).

[26] Última aula da manhã de sexta-feira, antes de irem de fim-de-semana

7. Reflexão final

Neste último capítulo apresento algumas ideias finais sobre o trabalho realizado. Partilho as limitações que identifiquei na sua concretização e avanço com possíveis desenvolvimentos do estudo. Registo algumas reflexões pessoais sobre estratégias e medidas para promover o estabelecimento de conexões, em mais do que uma das suas vertentes.

O estudo das *Sequências e regularidades*, com a exploração de padrões, contribuiu para o desenvolvimento do sentido de símbolo e do pensamento algébrico dos alunos. As equações surgiram associadas ao termo geral, e os alunos conseguiram apresentar processos próprios de as resolver. Relacionar as sequências com as funções e solicitar várias representações de uma mesma função, revelou algumas das fraquezas dos alunos, nomeadamente na obtenção da expressão analítica que a define.

Ao trabalho com estas tarefas, os alunos apropriaram-se do significado matemático de muitas das ideias envolvidas, estabeleceram conexões e as suas produções revelaram uma boa capacidade de raciocinar matematicamente e de explicar e argumentar oralmente. Contudo, na comunicação escrita, mantiveram-se algumas fragilidades.

As dificuldades que os alunos revelaram ligadas aos tópicos matemáticos confirmam que o desenvolvimento do pensamento algébrico é um processo lento e deve ser desenvolvido ao longo de toda a escolaridade. Era natural prever dificuldades acrescidas nestes alunos, que contataram com o novo PMEB apenas no início do 3.º ciclo.

As conexões entre ideias matemáticas são por si só um tema muito complexo e saem enriquecidas quando as exploramos no contexto da *Álgebra*. Sinto-me desafiada em continuar a procurar respostas para as questões de investigação que defini, alargando-as aos próximos anos deste ciclo de escolaridade. Por opção pessoal tenho investido no trabalho com alunos deste ciclo, e se me for dada a possibilidade, continuarei a fazê-lo.

A pertinência do estudo das conexões matemáticas confirma-se ao proporcionar uma ideia da Matemática como um todo integrado, contribuindo para que os alunos apreciem a sua beleza e o seu poder, como instrumento de compreensão da realidade. Permite ainda uma compreensão mais profunda das ideias matemáticas, diminuindo por exemplo, a necessidade de memorização. O trabalho com as conexões deverá ser transversal a todo o currículo e uma investigação da sua influência na aprendizagem da Matemática deverá ser realizada durante um período de tempo mais longo.

Uma das fraquezas, que identifico neste estudo, foi o fato das tarefas concebidas por mim não terem sido experimentadas antes da sua aplicação neste estudo. Quem vivencia um processo de elaboração de tarefas confronta-se com múltiplas adaptações dos itens, até se atingir uma versão que nos satisfaça. São muito vantajosas as anotações que fazemos à tarefa após cada aplicação: uma abordagem não prevista, uma dificuldade inesperada, indicações dos tempos de exploração e aspetos a ter em conta na discussão.

Um dos desafios que senti foi desempenhar o duplo papel de professora e investigadora. Durante as aulas, alguns alunos solicitavam frequentemente a minha atenção, quer por necessitarem de um acompanhamento mais individualizado, quer por revelarem comportamentos desajustados, os quais exigiam uma regulação muito próxima. Raros foram os momentos em que consegui fazer registos escritos imediatos às observações realizadas. Os registos áudio e vídeo dos vários momentos do trabalho revelaram-se essenciais na análise de aspetos de que não me apercebi durante a realização da aula. Confirmei que boa parte do que é discutido nos grupos de trabalho, perde-se na passagem para os registos escritos dos alunos, e não é partilhado no momento da discussão.

Uma das complexidades que identifico no ensino, é na manutenção do equilíbrio entre o que é planificado e a sua concretização. As decisões de avançar, numa ou noutra direção, conforme se desenrolam os trabalhos, considerando as dificuldades inesperadas sentidas pelos alunos e as descobertas com que também nos surpreendem, têm por vezes, de ser tomadas em breves instantes. Como professora, preocupo-me em estar recetiva e atenta, aos variados contributos dos alunos, para que se estabeleçam conexões matemáticas. Tento ouvir atentamente os meus alunos e tenho uma forte crença de que eles são capazes. Gostaria de realçar esta minha convicção – os nossos alunos são capazes!

A minha gestão curricular seria beneficiada, se os manuais escolares disponibilizassem uma coleção de tarefas promotoras de conexões, não vinculadas a uma unidade temática, eventualmente organizadas no final. Permitiria a sua exploração, no momento mais adequado, tendo em conta a planificação que realizasse. Embora estas tarefas já surjam em muitos materiais de apoio do professor, a necessidade de poupar os recursos da escola, nomeadamente na realização de fotocópias, traz dificuldades acrescidas à sua implementação na sala de aula.

Uma das vantagens que identifico na decisão política de organizar os estabelecimentos de ensino em agrupamentos, reside na possibilidade (teórica) de facilitar um maior diálogo entre os professores que acompanham os alunos ao longo da sua escolaridade. Portanto, ao existir uma maior promoção do trabalho cooperativo entre professores dos vários ciclos de escolaridade, poderá este contribuir para a articulação vertical de conteúdos, procedimentos, notações, entre outros.

Um exemplo de um trabalho no sentido da articulação vertical atrás referida seria a discussão de como abordar o tema das *Sequências e regularidades* ao longo dos três ciclos de escolaridade. Os professores, em conjunto afeririam o que seria explorado em cada ciclo, e definiriam uma 'linguagem' comum. A meu ver, esta uniformização contribuiria para que os significados dos conceitos envolvidos fossem mais facilmente adquiridos pelos alunos, surgindo a Matemática aos 'olhos' destes como um todo coerente e consistente. Contribuiria também para que não houvesse uma repetição, em cada ano, do que foi trabalhado anteriormente, dificultando a concretização do currículo prescrito.

A realização deste estudo constituiu para mim, uma oportunidade de aprendizagem muito significativa. Experimentei o papel de investigadora, lidando com as dificuldades inerentes ao processo e enquanto professora, permitiu-me obter um conhecimento mais aprofundado das aprendizagens realizadas pelos meus alunos, num dos temas mais exigentes da Matemática, neste nível de escolaridade.

Referências

Abrantes, P. (1989). Matemática, realidade e trabalho de projecto na escola secundária. *Educação e Matemática, 12* , pp. 3-4.

Abrantes, P. (1994). *O trabalho de projeto e a relação dos alunos com a Matemática. A experiência do projeto Mat 789.* Lisboa: Departamento de Educação da Faculdade de Ciências de Lisboa. Universidade de Lisboa.

Abrantes, P., Serrazina, L., & Oliveira, I. (1999). *A Matemática na educação básica.* Lisboa: DEB, Ministério da Educação (ME).

Afonso, P. (2008). *O mundo mágico das conexões matemáticas.* Castelo Branco: Instituto Politécnico de Castelo Branco.

Alvarenga, D., & Vale, I. (2007). A exploração de problemas de padrão: um contributo para o desenvolvimento do pensamento algébrico. *Quadrante, XVI(1)* , pp. 27-55.

Alves, M. d., & Santos, M. P. (1994). MatemÁrtica-Um Projeto Europeu. In A. d. Pro, *Atas do ProfMat94* (pp. 309-317). Leiria: Associação de Professores de Matemática.

APM. (4 de outubro de 2007). *Parecer da APM - Programa de Matemática do Ensino Básico.* Obtido em 8 de julho de 2012, de http://www.apm.pt/files/_Parecer_PMEB_APM_470523a69e366.pdf

Bishop, A., & Goffree, F. (1986). Classroom organization and dynamics. In A. G. B. Christiansen, *Perspectives on mathematics education* (pp. 309-365). Dordrecht: D. Reidel.

Bivar, A., Grosso, C., Oliveira, F., & Timóteo, M. C. (9 de julho de 2012). *Metas curriculares para o ensino básico - Matemática.* Obtido de Governo de Portugal, Ministério da Educação e Ciência: http://www.portugal.gov.pt/media/643611/prop_metas_eb_matematica_vf.pdf

Boaler, J. (2009). *The Elephant in the Classroom: Helping Children Learn & Love Maths.* Souvenir Press.

Boavida, A. M., Paiva, A. L., Cebola, G., Vale, I., & Pimentel, T. (2008). *A Experiência Matemática no Ensino Básico.* Lisboa: DGIDC, ME.

Bogdan, R., & Biklen, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto: Porto Editora.

Borralho, A., & Barbosa, E. (2011). Padrões e o desenvolvimento do pensamento algébrico. Recife, Brasil.

Branco, N. C. (2008). O estudo de padrões e regularidades no desenvolvimento do pensamento algébrico. *Dissertação de mestrado* . Universidade de Lisboa.

Brocardo, J., Delgado, C., Mendes, F., Rocha, I., & Serrazina, L. (2006). Números e Álgebra: desenvolvimento curricular. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos, & P. Canavarro, *Números e Álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (pp. 65-92). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Canavarro, A. P. (2009). O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. In *Quadrante 16* (pp. 81-118).

Carreira, S. (2010a). Conexões no ensino da Matemática — Não basta vê-las, é preciso fazê-las! *Educação e Matemática, 110* , p. 1.

Carrreira, S. (2010b). Conexões matemáticas- Ligar o que se foi desligando. *Educação Matemática, 110* , pp. 13-18.

Costa, B. R. (2010). *Novo Espaço, 7.º ano.* Porto: Porto Editora.

DEB. (2001). *Currículo nacional do ensino básico: competências essenciais.* Lisboa: Ministério da Educação.

DGIDC. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico.* Obtido em 28 de setembro de 2009, de http://sitio.dgidc.minedu.pt/matematica/Documents/ProgramaMatematica.pdf

DGIDC. (2009). *Proposta de cadeia de tarefas para o 7.º ano - Equações.* Obtido em 19 de julho de 2012, de http://area.dgidc.min-edu.pt/materiais_NPMEB/034_Sequencia_ equacoes_TP_3c7_actualFev2010.pdf

Ferri, R. B. (2010). Estabelecendo conexões com a vida real na prática da aula de Matemática. *Educação e Matemática, 110* , pp. 19-25.

Figueira, C., Loureiro, C., Lobo, E., Rodrigues, M. P., & Almeida, P. (junho de 2007). *Visualização e Geometria nos Primeiros Anos, Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores dos 1.º e 2.º ciclos.* Obtido em 11 de julho de 2012, de http://area.dgidc.min-edu.pt/materiais_NPMEB/061_visualgeo.pdf

Fonseca, H., Brunheira, L., & Ponte, J. P. (1999). As actividades de investigação, o professor e a aula de Matemática. *Actas do ProfMat 99* (pp. 91-101). Lisboa: APM.

GAVE. (2002). *PISA 2000 - Conceitos fundamentais em jogo na avaliação de literacia matemática e competências dos alunos portugueses.* Lisboa: Editorial do ME.

GAVE. (2004). *PISA 2003 - Conceitos Fundamentais em Jogo na Avaliação de Literacia Matemática.* Lisboa: Editorial do Ministério da Educação.

Gravemeijer, K. P. (2005). What makes mathematics so diffi cult, and what can we do about it? In A. P. L. Santos, *Educação matemática: Caminhos e encruzilhadas* (pp. 83–101). Lisboa: APM.

Guerreiro, L. A. (2009). O Papel das representações algébricas na aprendizagem das funções. *Dissertação de mestrado* . Universidade de Lisboa.

Infopédia. (2011). Obtido em 24 de dezembro de 2011, de Enciclopédia e Dicionários Porto Editora: http://www.infopedia.pt/lingua-portuguesa/conex%C3%A3o

Leuca, T. (2010). *Conexões no ensino e aprendizagem das sucessões. Relatório da prática de ensino supervisionada.* Universidade de Lisboa.

NCTM. (1994). *Normas para o currículo e a avaliação em Matemática escolar.* Lisboa: APM/IIE (Obra original publicada em 1989).

NCTM. (2008). *Princípios e normas para a Matemática escolar.* Lisboa: APM (Obra original publicada em 2000).

Oliveira, A. T. (2004). A relação Álgebra/Geometria no estudo da equação do 2º grau. *Educação e Matemática, 76* , pp. 41-46.

Oliveira, H. (2009). A Álgebra no Novo Programa de Matemática do Ensino Básico. *Educação e Matemática* , pp. 83-86.

Ponte, J. P. (2005a). Álgebra no currículo escolar. *Educação e Matemática, 85* , pp. 36-42.

Ponte, J. P. (2010a). Conexões no programa de Matemática do ensino básico. *Educação e Matemática, 110* , pp. 3-6.

Ponte, J. P. (2005b). Gestão curricular em Matemática. *In GTI (Ed.), O professor e o desenvolvimento curricular.* , pp. 11-34. Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2006). Números e Álgebra no currículo escolar. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos, & P. Canavarro, *Números e Álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (pp. 5-27). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2009a). *Álgebra no ensino básico.* Obtido em 6 de setembro de 2009, de http://area.dgidc.min-edu.pt/materiais_NPMEB/003_Brochura_Algebra_NPMEB_(Set2009).pdf

Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2010b). *O desenvolvimento do pensamento algébrico: desafios na concretização do novo programa.* Obtido em 24 de julho de 2012, de http://www.apm.pt/files/_CO_Ponte_Branco_ Matos_ 4a40fb8 fa3c95.pdf

Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2008). O simbolismo e o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos. *Educação e Matemática, 100* , pp. 89-96.

Ponte, J. P., Ferreira, C., Varandas, J. M., Brunheira, L., & Oliveira, H. (1999). *Monografia de investigação "A Relação Professor Aluno na Realização de Investigações Matemáticas"*. Lisboa: Projeto Matemática para todos e APM.

Ponte, J. P., Matos, A., & Branco, N. (2009b). *Sequências e funções: Materiais de apoio ao professor com tarefas para o 3.º ciclo – 7.º ano.* Obtido em 7 de maio de 2012, de http://area.dgidc.min-edu.pt / materiais_NPMEB/ 023_Sequencia_ Sequencias_e_ Funcoes_NPMEB_ 3c7.pdf

Regulamento interno da Escola Secundária Braamcamp Freire. (2009-2013). Obtido em 6 de julho de 2012, de http://www.esec-braamcamp-freire.rcts.pt/index.php?option=com_docman&Itemid=132

Saraiva, M. J., Teixeira, A. M., & Andrade, J. M. (2010). Estudo das funções no programa de Matemática A com problemas e tarefas de exploração. *Projecto IMLNA - Promover a aprendizagem Matemática em Números e Álgebra* . Instituto de Educação, Universidade da Beira Interior e APM.

Sebastião e Silva, J. (1975). *Guia para utilização do compêndio de Matemática — Curso Complementar do Ensino Secundário.* Lisboa: Edição Gabinete de Estudos e Planeamento.

Serrazina, L., Lopes, A. V., Oliveira, H., Sousa, H., Segurado, M. I., Teixeira, M. P., et al. (2010). *Metas de Aprendizagem*. Obtido em 4 de julho de 2012, de DGIDC, ME: http://www.metasdeaprendizagem.min-edu.pt/sobre-o-projecto/apresentacao/

Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). Tarefas matemáticas como quadro para a reflexão: da investigação à prática. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3(4)* , pp. 268-275 (tradução).

Stein, M., Engle, R., Smith, M., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning, 10(4)* , 313-340.

Teixeira, P., & Guimarães, H. M. (2011). Sequências e regularidades no 7.º ano: uma abordagem no quadro do novo programa de Matemática. *EIEM 2011 - Ensino e aprendizagem da Álgebra. Actas do Encontro de Investigação em Educação Matemática* (pp. 441–463). Póvoa do Varzim: M. H. Martinho, R. A. T. Ferreira, I. Vale, J. P. Ponte, (eds).

Vale, I., Palhares, P., Cabrita, I., & Borralho, A. (2006b). Os padrões no Ensino-Aprendizagem da Álgebra. In T. P. I. Vale, *Números e Álgebra na aprendizagem da matemática e na formação de professores* (pp. 193-212). Lisboa: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Vale, I., Pimentel, T., Barbosa, A., Fonseca, L., Santos, L., & Canavarro, P. (2006a). *Números e Álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores.* Lisboa: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Viseu, F., & Morgado, J. C. (2011). Manuais escolares e desprofissionalização docente: um estudo de caso com professores de Matemática. *Livro de Atas do XI Congreso Internacional Galego-Portugués de Psicopedagogía* (pp. 991-1002). Corunha: Universidade da Corunha.

Vlassis, J., & Demonty, I. (2008). *A Álgebra ensinada por situações-problemas.* Lisboa: Instituto Piaget (Obra original publicada em 2002).

Wood, T. (1999). Creating a context for argument in mathematics class. *Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 30, No. 2* , pp. 171–191.

Yackel, E. &. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27(4)* , 458–477.

Anexos

Anexo 1

PLANIFICAÇÃO ANUAL

Tópicos a Lecionar	N.º de blocos previstos
1.º PERÍODO (37 blocos previstos)	
Apresentação; Considerações sobre a disciplina; Planificação do ano letivo.	1
Avaliação Diagnóstica	1
Números Naturais Números primos e números compostos; Múltiplos e divisores de um número natural; Decomposição em fatores primos; Critérios de divisibilidade; Mínimo múltiplo comum e máximo divisor comum de dois números.	5
Números inteiros Representação na reta numérica; Comparação e ordenação; Adição e subtração com representação na reta numérica; Valor absoluto e simétrico de um número; Multiplicação e divisão, propriedades; Potências e Operações com potências; Raiz quadrada e Raiz cúbica.	8
Triângulos e quadriláteros Ângulos: amplitude e medição; Distinguir ângulos complementares e suplementares e identificar ângulos verticalmente opostos e ângulos alternos internos; Soma dos ângulos internos e externos de um triângulo; Congruência de triângulos; Propriedades, classificação e construção de quadriláteros.	15
Avaliação formativa e sumativa	6
Autoavaliação	1
Subtotal	**37**
2.º PERÍODO (33 blocos previstos)	
Sequências e regularidades Termo geral de uma sequência numérica; Representação.	7
Funções Conceito de função e de gráfico de uma função (domínio racionais não negativos). Proporcionalidade direta como função.	9
Equações Equações do 1º grau a uma incógnita (com parênteses mas sem denominadores)	10
Avaliação formativa e sumativa	6
Autoavaliação	1
Subtotal	**33**
3.º PERÍODO (24 blocos previstos)	
Semelhanças Noção de semelhança; Ampliação e redução de um polígono; Polígonos semelhantes; Semelhança de triângulos.	9
Tratamento de dados Tabelas de frequências relativas; Gráficos circulares, de linha e diagramas de caule-e-folhas; Extremos e amplitude. Organização, análise e interpretação de dados – histograma; Medidas de localização e dispersão; Discussão de resultados.	9
Avaliação formativa e sumativa	5
Autoavaliação	1
Subtotal	**24**
TOTAL	**94**

A planificação contempla o início das aulas a 15 de Setembro 2011 e o fim a 15 de Junho 2012.

Anexo 2

Enunciado da Tarefa do *Voo em V*.

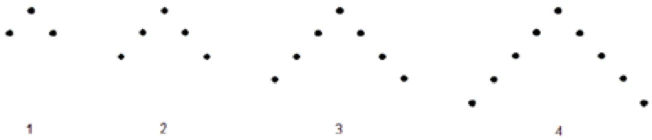
Ficha de Trabalho
Prof.: *Catarina Ferreira*

Sequências e Regularidades

Voo em "V"

1. Algumas espécies de aves migratórias voam em bando, formando uma configuração em "V". Diversas equipas de cientistas têm investigado esta organização, procurando compreender as possíveis vantagens para o voo das aves e dos aviões.

Na sequência que se segue, cada figura representa um bando, cada ponto simboliza uma das aves que lhe pertence e, de figura para figura, o número de aves vai sempre aumentando.
Eis os quatro primeiros termos:



Responde às perguntas seguintes, apresentando o teu raciocínio por palavras, esquemas, cálculos ou símbolos.

1.1. Quantos pontos tem a figura seguinte desta sequência?
1.2. Quantos pontos tem a 100.ª figura (termo de ordem 100) desta sequência?
1.3. Existe, nesta sequência, alguma figura com 86 pontos? Se existir, indica a ordem que lhe corresponde.
1.4. Existe alguma figura nesta sequência com 135 pontos? Se existir, determina a ordem que lhe corresponde.
1.5. Escreve uma regra que permita determinar o número de pontos de qualquer figura desta sequência.
1.6. Escreve uma expressão algébrica que traduza a regra descrita na pergunta anterior.

Extraído de Materiais de Apoio ao NPMEB – DGIDC

Anexo 3

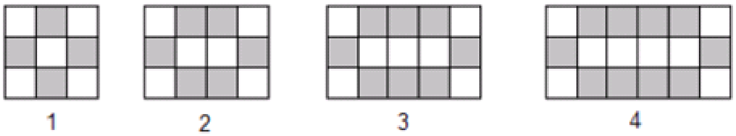
Enunciado da Tarefa dos *Azulejos*.

Ficha de Trabalho
Prof.: *Catarina Ferreira*

Sequências e Regularidades

Azulejos

1. A Sara construiu uma sequência de figuras utilizando pequenos azulejos brancos e cinzentos, dispostos do seguinte modo:



Responde às perguntas seguintes, apresentando o teu raciocínio por palavras, esquemas, cálculos ou símbolos.

1.1. Representa a 5.ª e a 6.ª figuras desta sequência.

1.2. Quantos azulejos, no total, tem a 50.ª figura?

1.3. Que figura da sequência tem, no total, 81 azulejos?

1.4. Ajuda a Sara a completar a tabela que fez para organizar os dados. Repara que na última linha da tabela deves introduzir expressões algébricas:

Número da figura	Número de azulejos cinzentos	Número de azulejos brancos	Número total de azulejos
1			
2			
3	8	7	15
4			
5			
6			
…			
n			

1.5. O Jorge sugeriu à Sara que a expressão algébrica $(n+2)+(n+2)+(n+2)$ representa o número total de azulejos em cada figura. Concordas com ele? Justifica a tua resposta.

1.6. A Marta, por sua vez, indicou a expressão algébrica $3\times(n+2)$. Esta expressão é equivalente à do Jorge? Justifica a tua resposta.

1.7. Indica outras expressões algébricas equivalentes, que possam representar o número total de azulejos em cada figura.

1.8. Recorrendo à expressão algébrica da Marta, $3\times(n+2)$:

a) Determina os termos de ordem 18 e 53. Na situação apresentada nesta tarefa, o que representam os valores que obtiveste?

b) Indica a ordem do termo da sequência que tem 294 azulejos.

Extraído de Materiais de Apoio ao NPMEB – DGIDC

Anexo 4

Enunciado da tarefa *Termo Geral de Sequências e Equações*.

Ficha de Trabalho **Conexões**

Prof: *Catarina Ferreira*

Nome do Aluno: *Turma:* *Nº:* **Data: / /**

Termo Geral de Sequências e Equações

A seguir é indicado o termo geral de algumas sequências. Para cada um deles responde ao pedido. Recorda que **n** representa a ordem do termo da sequência.

Termo Geral	***Calcula***	***Explica o teu raciocínio por palavras***
n+2	O primeiro termo	
	A ordem cujo termo é 20	
	O que representa n+2 = 40? Determina o valor de n.	
2n+1 (Termo geral do número de ponto do voo em V)	O n.º da figura que tem 301 pontos	
	O n.º da figura do bando com 1001 aves	
	O que representa 2n+1 = 51 ? Determina o valor de n.	
3n+6 (Termo geral do total dos azulejos)	O n.º da figura com o total de 306 azulejos	
	O n.º da figura com o total de 307 azulejos	
	O que representa **3n+6 = 96** ? Determina o valor de n.	
Explica, a alguém que nunca resolveu uma equação como pode resolver a seguinte: 2n+5=45		

Anexo 5

Imagem do *slide* apresentado na discussão coletiva de parte da tarefa *Padrão Geométrico e Função.*